

## Θέμα Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- Μονάδες 7*
- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.
- Μονάδες 4*
- A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
- Για κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .*
- α)** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
- (μονάδα 1)*
- β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α)**.
- (μονάδες 3)*
- Μονάδες 4*
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν είναι σωστή, ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της  $f$  ένα το πολύ κοινό σημείο.
- β)** Η τιμή της  $f$  στο  $x_0 \in A$  ( $A$ : πεδίο ορισμού της  $f$ ) είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας  $x = x_0$  και της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$ .
- γ)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f, g$  για τις οποίες ισχύει
- $f(x) > g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και υπάρχουν τα
  - $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , τότε ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- δ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .
- ε)** Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται.

## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty) = A$

**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

*Μονάδες 6*

**B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$ .

*Μονάδες 7*

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να χαράξετε τη γραφική της παράσταση.

*Μονάδες 7*

**B4.** Να λύσετε στο  $(0, +\infty)$  την εξίσωση

$$(E): x \left( x + \operatorname{csc} \frac{\pi}{x} \right) = x - 1$$

*Μονάδες 5*

### Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$  και το σημείο  $M\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$  με  $\alpha > 0$  της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$ .

Έστω  $(\varepsilon)$  η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_f$  στο σημείο  $M\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$  και  $A, B$  τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  τέμνει τους θετικούς ημιάξονες  $Ox$  και  $Oy$  αντιστοίχως.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** Η εξίσωση της εφαπτομένης  $(\varepsilon)$  είναι:

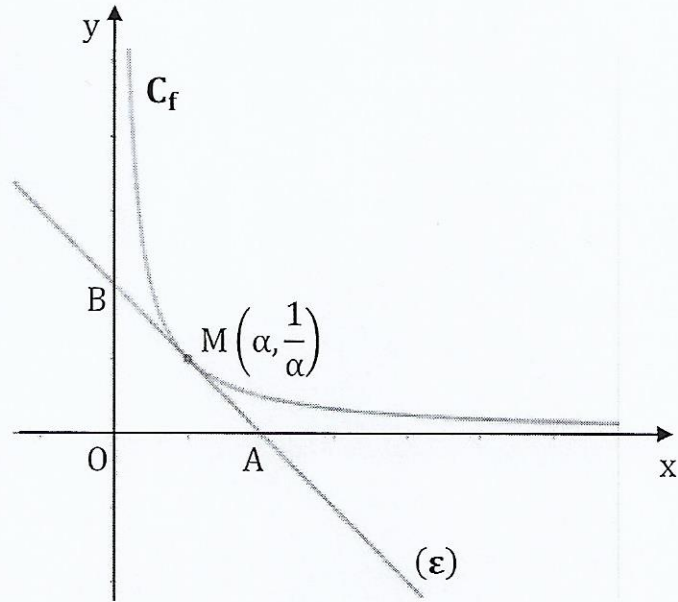
$$y = -\frac{1}{\alpha^2}x + \frac{2}{\alpha}$$

**β)** Το σημείο  $M$  είναι το μέσο του τμήματος  $AB$ .

**γ)** Το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  είναι σταθερό.

(μονάδες 3-3-3)

Μονάδες 9



**Γ2.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** Η περίμετρος  $\Pi$  του τριγώνου  $OAB$  δίνεται, ως συνάρτηση του  $\alpha$ , από την

$$\Pi(\alpha) = 2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 2\sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}} \quad \text{με } \alpha \in (0, +\infty)$$

(μονάδες 4)

**β)** Η περίμετρος ελαχιστοποιείται όταν το τρίγωνο  $OAB$  γίνεται ισοσκελές.

(μονάδες 6)

Μονάδες 10

**Γ3.** Επιπλέον θεωρούμε και τη συνάρτηση  $g: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία είναι:

- συνεχής στο  $[1,2]$  με  $g(1) = 2$  και
- παραγωγίσιμη στο  $(1,2)$

$$\text{με } f(1) < g'(x) < f\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{για κάθε } x \in (1,2)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1,2)$  τέτοιο, ώστε

$$g(x_0) = 4x_0 - 3$$

Μονάδες 6

## Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ x \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = 1 - \frac{\alpha}{x}, \text{ για κάθε } x > 0, \alpha > 0 \text{ και } f(1) = e$$

Επιπλέον για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \alpha^{x-e}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = e$ .

*Μονάδες 6*

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x \ln x + e}{x}, \quad x > 0$$

*Μονάδες 5*

**Δ3.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$ .

*Μονάδες 6*

**Δ4.α)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$ .

(μονάδες 3)

**β)** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (f(x))^2 \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

(μονάδες 5)

*Μονάδες 8*