

## **ΘΕΜΑ 1**

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση κύκλου κέντρου  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνας  $\rho$  είναι η

$$C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

(Μονάδες 10)

B. Τι καλείται παραβολή με εστία  $E$  και διευθετούσα  $\delta$ ;

(Μονάδες 5)

Γ. Σημειώστε ( $\Sigma$ ) αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή ( $\Lambda$ ) αν είναι λανθασμένες.

1. Ο κύκλος με ακτίνα 1 καλείται μοναδιαίος.
2. Η εφαπτομένη κύκλου κέντρου  $O(0, 0)$  και ακτίνας  $\rho$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  είναι η  $\varepsilon: x_1x + y_1y = \rho$ .
3. Η εστία της παραβολής  $y^2 = 4x$  βρίσκεται πάνω στον  $x'$ .
4. Η διευθετούσα της παραβολής  $x^2 = 2py$ ,  $p \neq 0$ , είναι η ευθεία με εξίσωση  $y = -\frac{p}{2}$ .
5. Στην παραβολή  $y^2 = 2px$ ,  $p \neq 0$ , οι τετμημένες των σημείων της και η παράμετρος  $p$  είναι πάντα ομόσημοι αριθμοί.
6. Κάθε ευθεία που έχει ένα σημείο τομής με μία παραβολή είναι εφαπτομένη της στο σημείο αυτό.
7. Η απόσταση της εστίας της παραβολής  $y^2 = 2px$ ,  $p \neq 0$ , από τη διευθετούσα της  $\delta$  είναι ίση με  $|p|$ .
8. Οι παραβολές  $y^2 = x$  και  $y^2 = -x$  είναι συμμετρικές ως προς τον  $y'y$ .
9. Ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = \alpha^2$  έχει για κατακόρυφες εφαπτομένες τις  $y = \alpha$  και  $y = -\alpha$ .
10. Το μοναδικό σημείο της παραβολής  $x^2 = 2py$ ,  $p \neq 0$ , με τετμημένη 0 είναι η κορυφή της.

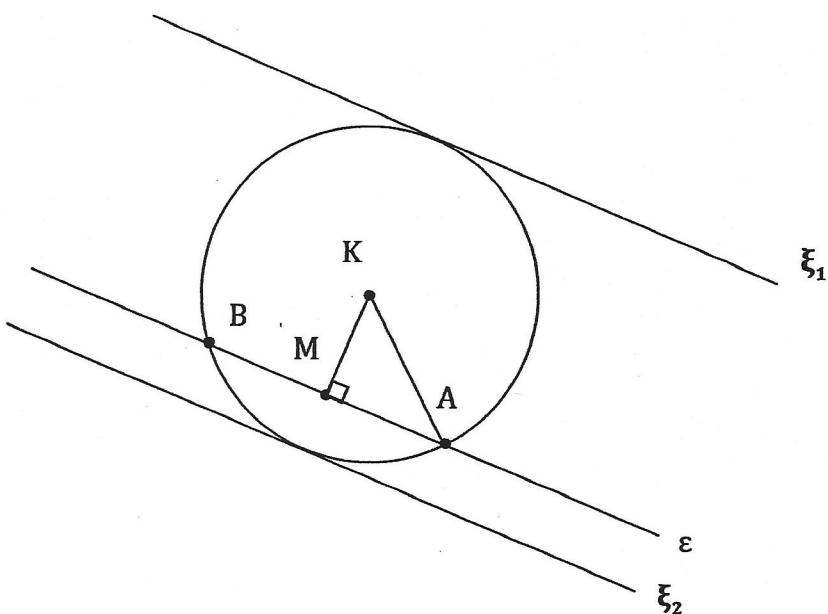
(Μονάδες 10)

## **ΘΕΜΑ 2**

Δίνεται η εξίσωση

$$C: x^2 + y^2 + 4y - 6 = 0.$$

- i. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. (Μονάδες 6)
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο  $K(0, -2)$  του παραπάνω κύκλου. (Μονάδες 6)
- iii. Αν η ευθεία  $\varepsilon: y = \lambda x + 3$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον  $x$ - $x$  και αποκόπτει από τον κύκλο  $C$  χορδή μήκους  $d = \sqrt{30}$ , να αποδείξετε ότι το μήκος του αποστήματος είναι ίσο με  $\frac{\sqrt{10}}{2}$  και στη συνέχεια να προσδιορίσετε το  $\lambda$ . (Μονάδες 7)
- iv. Αν  $\lambda = -3$  να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων  $\xi_1, \xi_2$  του κύκλου που είναι παράλληλες στην  $\varepsilon$ . (Μονάδες 6)



## **ΘΕΜΑ 3**

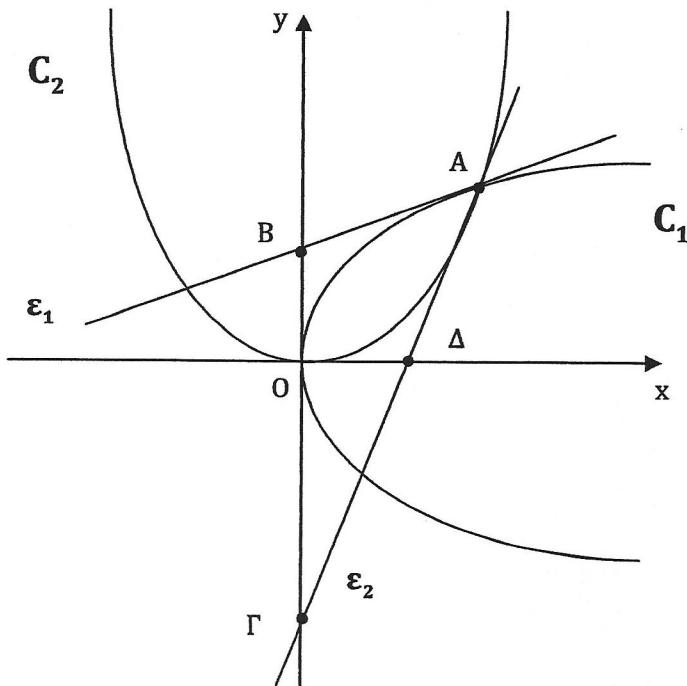
Θεωρούμε τις παραβολές με εξισώσεις

$$C_1: y^2 = 2px \text{ και } C_2: x^2 = 2py \text{ με } p > 0.$$

- i. Να βρείτε τα σημεία τομής των  $C_1, C_2$ . (Μονάδες 6)
- ii. Αν  $A(2p, 2p)$  είναι ένα από τα παραπάνω κοινά σημεία των  $C_1, C_2$  να αποδείξετε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  των  $C_1, C_2$  αντιστοίχως, στο  $A$  είναι ίσο με 1. (Μονάδες 6)

- iii. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου  $ABG$  που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτομένες με τον γύρο ως συνάρτηση του  $p$ . (Μονάδες 6)
- iv. Να αποδείξετε ότι το σημείο  $A$  είναι εξωτερικό του κύκλου με αντιδιαμετρικά σημεία τα σημεία τομής  $B$  της  $\varepsilon_1$  με τον γύρο και  $\Delta$  της  $\varepsilon_2$  με τον  $x'$  $x$ .

(Μονάδες 7)



#### ΘΕΜΑ 4

Έστω η εξίσωση

$$C: y^2 = 2(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6)x, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- i. Να βρείτε τις πιθανές τιμές των πραγματικών αριθμών  $\lambda$  έτσι ώστε η εξίσωση να παριστάνει παραβολή με άξονα συμμετρίας τον θετικό ημιαξονα  $Ox$ . (Μονάδες 6)
- ii. Αν επιπλέον η απόσταση της εστίας  $E$  από τη διευθετούσα δίνεται ως  $6$  να βρείτε την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 6)
- iii. Αν  $p=6$ , να βρείτε το σημείο  $M(x_1, y_1)$  με  $x_1 \neq 0$ ,  $y_1 \neq 0$  της παραβολής έτσι ώστε αν η εφαπτομένη στο  $M$  τέμνει τη διευθετούσα στο  $A$ , το τρίγωνο  $AME$  να είναι ισοσκελές με κορυφή την εστία  $E$ . (Μονάδες 7)
- iv. Αν  $M(3, 6)$  να βρείτε το περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου  $AME$ . (Μονάδες 6)

## **ΘΕΜΑ 1**

A. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$ , όπου  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ , είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

(Μονάδες 10)

B. Σημειώστε ( $\Sigma$ ) αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή ( $\Lambda$ ) αν είναι λανθασμένες.

1. Η απόσταση ενός σημείου  $K(x_0, y_0)$  από την ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$  είναι ίση με  $d(K, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .
2. Ο áξονας  $x'x$  έχει εξίσωση  $x = 0$ .
3. Η ευθεία με εξίσωση  $x - y + 2 = 0$  τέμνει τον áξονα  $y'y$  στο σημείο  $A(0, 2)$ .
4. Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ίσο με  $\frac{1}{2} \cdot \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma})$ .
5. Τα σημεία που επαληθεύουν την εξίσωση  $y = -x$  είναι της μορφής  $M(\kappa, -\kappa)$  με  $\kappa \in \mathbb{R}$ .
6. Το διάνυσμα  $\vec{v} = (1, -2)$  είναι κάθετο στην ευθεία  $x - 2y = 0$ .
7. Η απόσταση των ευθειών με εξισώσεις  $y = x + 1$  και  $y = x + 3$  είναι ίση με 2.
8. Οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο  $M(x_0, y_0)$  είναι όλες της μορφής  $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
9. Η ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$  είναι παράλληλη στον  $y'y$  αν και μόνο εάν  $B = 0$ .
10. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση  $y = 2017$  δεν ορίζεται.

(Μονάδες 10)

Γ. Να σημειώσετε στις παρακάτω προτάσεις τη σωστή απάντηση.

1. Η μεσοπαράλληλος των ευθειών  $\varepsilon_1 : 2x + 3y + 6 = 0$  και  $\varepsilon_2 : y = -\frac{2}{3}x + 4$  είναι η ευθεία με εξίσωση:

A.  $2x + 3y + 3 = 0$       B.  $y = -\frac{2}{3}x + 1$       Γ.  $2x + 3y - 6 = 0$       Δ.  $y = -\frac{2}{3}x - 1$

2. Οι ευθείες με εξίσωσεις

$$\varepsilon_1 : (\lambda - 1)x + (\lambda^2 - 1)y + \lambda = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : \lambda x - (\lambda + 1)y + 2 = 0$$

τέμνονται αν και μόνο αν

A.  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$       B.  $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$       Γ.  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$       Δ.  $\lambda \in (-1, 1)$

(Μονάδες 5)

## ΘΕΜΑ 2

Έστω η ευθεία  $\varepsilon : 2x - y - 1 = 0$  και τα σημεία  $K(3\lambda - 2, \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

i. Να βρεθεί το  $\lambda$  έτσι ώστε η απόσταση του  $K$  από την ευθεία  $\varepsilon$  να είναι ίση με  $\sqrt{5}$ .

(Μονάδες 6)

ii. Αν  $A(4, 2)$  και  $B(-2, 0)$  να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $AB$ .

(Μονάδες 6)

iii. Να υπολογισθεί η οξεία γωνία των ευθειών  $AB : x - 3y + 2 = 0$  και  $\varepsilon$ .

(Μονάδες 8)

iv. Να βρεθεί σημείο  $M$  του άξονα  $y'$  που σχηματίζει με τα  $A$ ,  $B$  ισοσκελές τρίγωνο με βάση την πλευρά  $AB$ .

(Μονάδες 5)

## ΘΕΜΑ 3

Έστω τα σημεία  $M(\kappa, -\kappa - 1)$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

i. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$ .

(Μονάδες 6)

ii. Αν  $\varepsilon : x + y + 1 = 0$  να βρείτε τις παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  στην  $\varepsilon$  που η απόσταση τους από την  $\varepsilon$  να είναι ίση με  $\sqrt{2}$ .

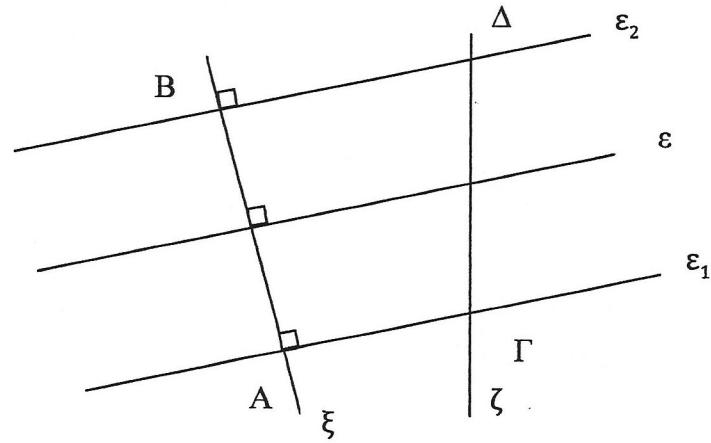
(Μονάδες 8)

iii. Αν  $\varepsilon_1 : x + y - 1 = 0$  και  $\varepsilon_2 : x + y + 3 = 0$  να βρεθεί η ευθεία  $\xi$  που είναι κάθετη στις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  και διέρχεται από το σημείο  $\Lambda(0, 5)$ .

(Μονάδες 6)

iv. Αν η ευθεία  $\xi : x - y + 5 = 0$  τέμνει τις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  στα σημεία  $A, B$  αντιστοίχως και η ευθεία  $\zeta : y = 3x + 1$ , τέμνει τις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  στα σημεία  $\Gamma, \Delta$  αντιστοίχως, να βρεθεί το εμβαδό του τραπεζίου με κορυφές τα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  έτσι ώστε  $AG // BD$ .

(Μονάδες 5)



#### **ΘΕΜΑ 4**

Δίνεται η εξίσωση

$$\varepsilon: (\lambda^2 - \lambda - 2)x + (\lambda^2 - 2\lambda - 3)y + \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$ . (Μονάδες 6)
- ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες της παραπάνω μορφής διέρχονται από σταθερό σημείο M. (Μονάδες 6)
- iii. Να βρεθεί η ευθεία της δέσμης που είναι κάθετη στην ευθεία  $\xi: 2x - y + 4 = 0$ . (Μονάδες 6)
- iv. Αν  $M(-1,1)$  και  $K, \Lambda$  σημεία της ευθείας  $\xi$  να βρείτε το μήκος (ΚΛ) εφόσον  $(MKL) = 1\text{τ.μ.}$  (Μονάδες 3)
- v. Αν  $(K\Lambda) = 2\sqrt{5}$  και  $\zeta: x = -1$  είναι μία από τις διαμέσους του τριγώνου MKL να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των K, Λ. (Μονάδες 4)

***Καλή επιτυχία!***

## ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Έστω Α και Β δυο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και Μ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ. Αν Ο σημείο αναφοράς να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

(Μονάδες 7)

Β. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

- i. Τι καλείται μοναδιαίο διάνυσμα;
- ii. Τι καλείται μηδενικό διάνυσμα;

(Μονάδες 4+4)

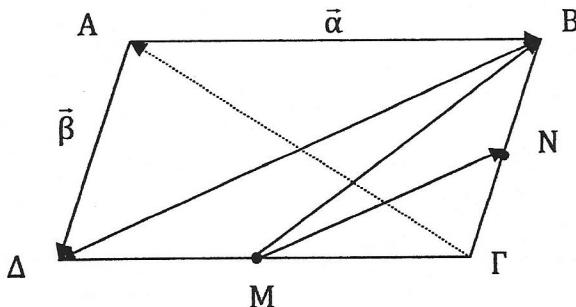
Γ. Να σημειώσετε (Σ) αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή (Λ) αν είναι λανθασμένες.

1. Αν  $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$  με  $\vec{\beta} \neq \vec{0}$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ , τότε  $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$  και αντιστρόφως.
2. Για οποιοδήποτε διάνυσμα  $\vec{\alpha}$  ισχύει ότι  $\mu \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} \Rightarrow \mu = \lambda$  με  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ .
3. Αν  $|\vec{\alpha}| = 0$ , τότε  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ .
4. Αν  $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ , τότε το διάνυσμα  $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$  είναι μοναδιαίο.
5. Αν Κ μέσο του ΑΒ τότε  $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK} = \vec{0}$ .
6. Ισχύει ότι  $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{GB}$ .
7. Αν  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$  τότε τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι ομόρροπα.
8. Για οποιοδήποτε διάνυσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύει ότι  $0^\circ \leq (\hat{\vec{\alpha}}, \vec{\beta}) \leq 90^\circ$ .
9. Αν ΑΒΓΔ παράλληλογραμμό τότε  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BD}$ .
10. Το μέτρο κάθε διανύσματος είναι μη αρνητικός αριθμός.

(Μονάδες 10)

## ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Στο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  έχουμε ότι  $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$  και  $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$  και  $M, N$  τα μέσα των πλευρών  $\Delta\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντιστοίχως. Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση αιτιολογώντας πλήρως την απάντηση σας.



i. Το διάνυσμα  $\overrightarrow{BD}$  είναι ίσο με

- A.  $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$       B.  $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$       C.  $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$       D.  $\frac{\vec{\beta} + \vec{\alpha}}{2}$

ii. Το διάνυσμα  $\overrightarrow{MB}$  είναι ίσο με

- A.  $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$       B.  $\vec{\alpha} + \frac{\vec{\beta}}{2}$       C.  $\vec{\alpha} - \frac{\vec{\beta}}{2}$       D.  $\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2}$

iii. Το διάνυσμα  $\overrightarrow{\Delta N}$  είναι ίσο με

- A.  $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$       B.  $\vec{\alpha} - \frac{\vec{\beta}}{2}$       C.  $\vec{\beta} - \frac{\vec{\alpha}}{2}$       D.  $\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$

iv. Το διάνυσμα  $\frac{\vec{\beta} - \vec{\alpha}}{4}$  είναι ίσο με το διάνυσμα

- A.  $\overrightarrow{MN}$       B.  $\frac{\overrightarrow{\Delta B}}{2}$       C.  $\frac{\overrightarrow{NM}}{2}$       D.  $\overrightarrow{NM}$

v. Το διάνυσμα  $\frac{\vec{\beta} + \vec{\alpha}}{4}$  είναι ίσο με το διάνυσμα

- A.  $\frac{\overrightarrow{\Delta B}}{4}$       B.  $\frac{\overrightarrow{\Gamma A}}{4}$       C.  $\frac{\overrightarrow{\Delta \Gamma}}{4}$       D.  $\frac{\overrightarrow{AG}}{4}$

(Μονάδες  $5 \times 5 = 25$ )

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και τα σημεία A, B, Γ. Αν O σημείο αναφοράς του επιπέδου τότε για τις διανυσματικές ακτίνες των A, B, Γ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \vec{\alpha} + \vec{\beta} \\ \overrightarrow{OB} &= 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} \\ \overrightarrow{OG} &= 4\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}\end{aligned}$$

- i. Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{AB}$

(Μονάδες 7)

- ii. Αν για το σημείο Δ του επιπέδου ισχύει ότι

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD}$$

να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο OBΔΓ είναι παραλληλόγραμμο.

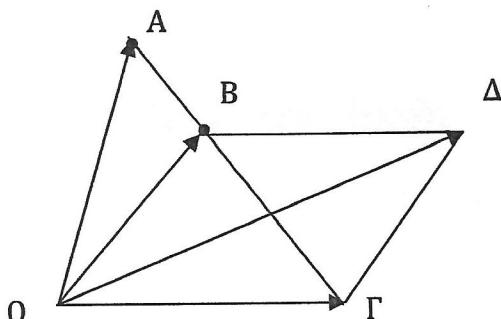
(Μονάδες 7)

- iii. Να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{OD} = 6\vec{\alpha} + 10\vec{\beta}$  και στη συνέχεια να εκφράσετε το  $\overrightarrow{AD}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ .

(Μονάδες 6)

- iv. Αν  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{BG}|$  να αποδείξετε ότι τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι αντίθετα.

(Μονάδες 5)



### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

Τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι κορυφές τετραπλεύρου τέτοια ώστε:

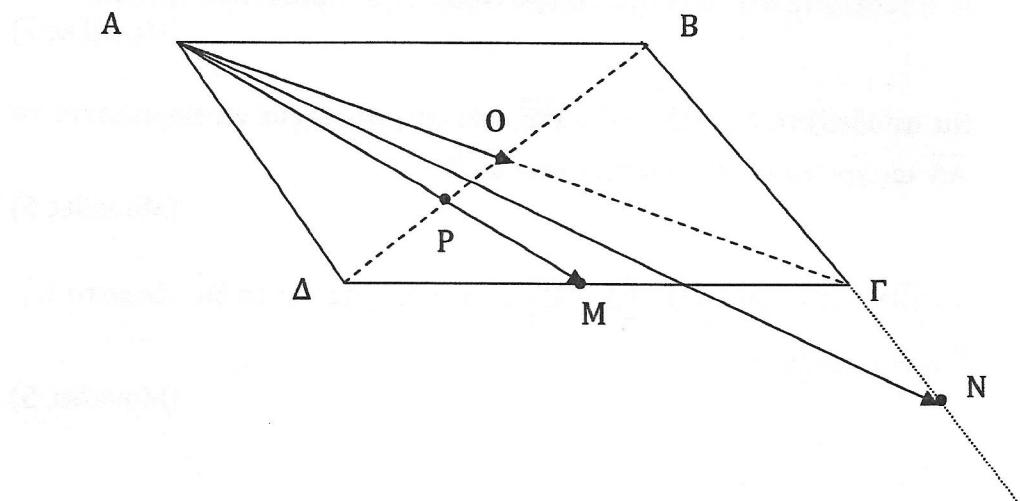
$$2\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{DK} - \overrightarrow{GA}$$

- i. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

- ii. Αν  $P$  σημείο της διαγωνίου  $\Delta B$  τέτοιο ώστε  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  και  $M$  μέσο της πλευράς  $\Gamma\Delta$  να αποδείξετε ότι  $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ . Τι συμπεραίνετε για τα σημεία  $A, P, M$ ;  
(Μονάδες 7)
- iii. Αν  $O$  το κέντρο του παραλληλογράμμου να αποδείξετε ότι  

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG}}{2}$$
  
(Μονάδες 6)
- iv. Αν  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AO}$  να αποδείξετε ότι το σημείο  $N$  ανήκει στο φορέα της πλευράς  $B\Gamma$ .  
(Μονάδες 5)



**Καλή επιτυχία!**