

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας ισούται με το μισό της υποτείνουσας.
 (10 μονάδες)

- B.** Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

- 1) Δύο ευθείες κάθετες προς μια τρίτη ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.
- 2) Το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού πενταγώνου ισούται με 540° .
- 3) Κάθε τετράπλευρο με τις διαγώνιες του κάθετες είναι ρόμβος.
- 4) Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου λέγεται βαρύκεντρο του τριγώνου.
- 5) Οι εντός κι επί τα αυτά γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη είναι ίσες.
- 6) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 180° .
- 7) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες τους.
- 8) Κάθε τετράγωνο είναι πάντοτε ρόμβος.
- 9) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά.
- 10) Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραπεζίου.

(10 μονάδες)

- Γ.** Δώστε τους ορισμούς του ορθογωνίου και του ρόμβου.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^ο

- A.** Έστω τρίγωνο ABC με $AB = 16$, $AC = 12$, $BC = 20$. Αν Δ, E, Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , AC και BC αντίστοιχα να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΔEZ .

(5 μονάδες)

- B.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABC με $\widehat{A} = 90^\circ$ και $\widehat{C} = 15^\circ$. Αν AM η διάμεσος και AD το ύψος του τριγώνου ABC , να δείξετε ότι $AD = \frac{BC}{4}$.
 (5 μονάδες)

Γ. Έστω τρίγωνο ABC και $AD=9$, $BE = 6$ δύο διάμεσοί του. Αν Θ το σημείο τομής τους να δείξετε ότι $A\Theta = 3\Theta E$.

(5 μονάδες)

Δ. Έστω τρίγωνο ABC για το οποίο ισχύει ότι η \widehat{A} γωνία είναι διπλάσια από τη \widehat{B} και κατά 20° μεγαλύτερη από τη \widehat{C} . Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

(5 μονάδες)

Ε. Έστω ισοσκελές τραπέζιο $ABCD$ ($AB//CD$) με $AB = 20$, $CD = 40$ και $\widehat{C} = 45^\circ$. Να δείξετε ότι το ύψος του τραπεζίου και το τμήμα KL είναι ίσα, όπου K, L τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου.

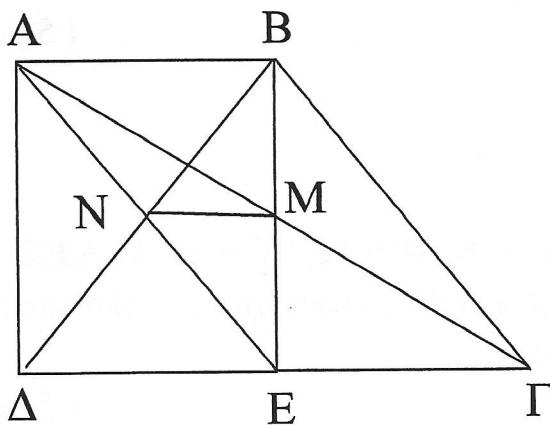
(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3^o

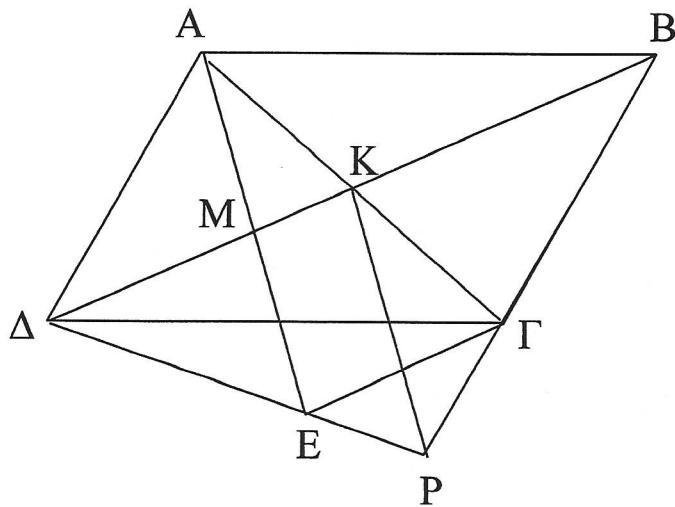
Δίνεται τραπέζιο $ABCD$ ($AB//CD$) με $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$, $\widehat{D} = 2\widehat{A}$ και $\widehat{C} = 3\widehat{D}$.

Φέρουμε $BE \perp AD$ που τέμνει τη διαγώνιο AC στο M . Αν η AE τέμνει τη BD στο N , να αποδείξετε ότι :

- a) Το τρίγωνο BGE είναι ισοσκελές. (7 μονάδες)
- β) Το τετράπλευρο $ABGE$ είναι παραλληλόγραμμο. (5 μονάδες)
- γ) $AE \perp BD$. (8 μονάδες)
- δ) $CD = 4MN$. (5 μονάδες)



ΘΕΜΑ 4^ο



Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E το συμμετρικό της κορυφής A ως προς τη διαγώνιο $B\Delta$. Έστω M το σημείο τομής των AE και $B\Delta$ και P το σημείο τομής των ΔE και $B\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι :

- α) Το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (8 μονάδες)
- β) Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (6 μονάδες)
- γ) Το ευθύγραμμο τμήμα BM είναι ίσο με τη διάμεσο του τραπεζίου $B\Gamma E\Delta$. (6 μονάδες)
- δ) $KP \parallel AE$. (5 μονάδες)

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα μεταξύ τους. (10 μονάδες)
- B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ) :
- 1) Αν P εσωτερικό σημείο ενός κύκλου (O,R) τότε $OP > R$.
 - 2) Δύο τρίγωνα με τις γωνίες τους ίσες μία προς μία είναι ίσα μεταξύ τους.
 - 3) Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.
 - 4) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη ευθεία τότε σχηματίζουν τις εντός επί τ' αυτά γωνίες τους ίσες.
 - 5) Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθεμια από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.
 - 6) Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

(9 μονάδες)

- Γ. Έστω οι κύκλοι $(K, \frac{\rho}{2})$ και $(\Lambda, 2\rho)$.

Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων αν γνωρίζεται ότι :

$$\alpha) K\Lambda = \frac{5\rho}{2} \quad \beta) K\Lambda = \rho$$

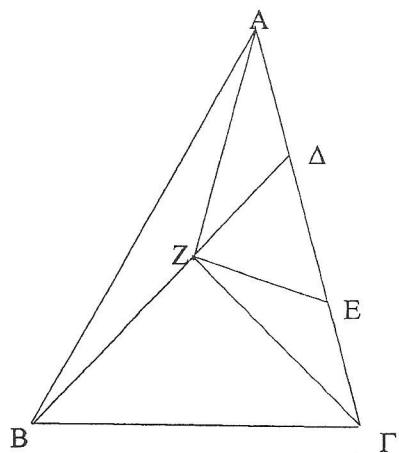
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(6 μονάδες)

Θέμα 2^ο

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 45^\circ$ και Δ, E δύο σημεία πάνω στην πλευρά $A\Gamma$ τέτοια ώστε $A\Delta = \Delta E = E\Gamma$. Αν Z είναι ένα σημείο της $B\Delta$ έτσι ώστε $Z\Delta = A\Delta$ και $B\widehat{Z}\Gamma = 60^\circ$.

- i) Δείξτε ότι το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές. (6 μονάδες)
- ii) Δείξτε ότι EZ είναι κάθετη στην AZ . (6 μονάδες)
- iii) Δείξτε ότι $AZ = \Gamma Z$. (6 μονάδες)
- iv) Υπολογίστε τη γωνία $A\widehat{B}\Gamma$. (7 μονάδες)



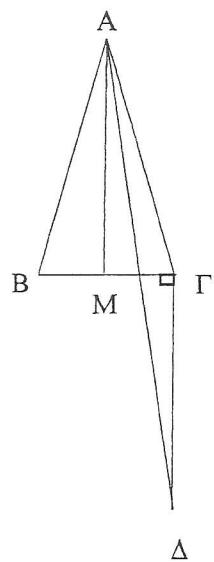
Θέμα 3^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABC με $AB = AC$ και AM η διάμεσός του.

Από το σημείο G φέρνουμε ημιευθεία Gx κάθετη στη BG προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και πάνω σε αυτή θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $GD = AB$.

Να αποδείξετε ότι :

- i) $AM // \Gamma\Delta$. (6 μονάδες)
- ii) $\Delta\Delta$ διχοτόμος της γωνίας $M\widehat{A}G$. (6 μονάδες)
- iii) $\Delta\widehat{A}\Gamma = \frac{90^\circ - \widehat{B}}{2}$. (7 μονάδες)
- iv) $A\Delta < 2 \cdot AB$. (6 μονάδες)



Θέμα 4^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABG με $AB = AG$ και σημεία Δ και E στις πλευρές AB , AG αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Delta = AE$. Έστω K το σημείο τομής των BE και $\Gamma\Delta$.

Από το A φέρνουμε ημιευθείες Ax και Ay τέτοιες ώστε $B\widehat{A}x = \Gamma\widehat{A}y = \omega$ όπως στο σχήμα. Ονομάζουμε Z και H τα σημεία τομής των ημιευθειών Ax και Ay με τις προεκτάσεις της πλευράς BG .

- i) Δείξτε ότι το τρίγωνο BKG είναι ισοσκελές. (5 μονάδες)
- ii) Δείξτε ότι AK είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$. (5 μονάδες)
- iii) Δείξτε ότι $BZ = GH$. (5 μονάδες)
- iv) Εξηγήστε γιατί τα τμήματα $Z\Delta$ και HE τέμνονται σε σημείο Λ πάνω στην AK . (5 μονάδες)
- v) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο E ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος BH , δείξτε ότι $\Delta Z // BE$. (5 μονάδες)

