

ΘΕΜΑ Α

A1. Με τη βοήθεια των τύπων:

- $\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sin\beta + \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ και
- $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$

να αποδείξετε ότι:

- $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sin\alpha$
- $\sin 2\alpha = \sin^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$
- $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$

(Μονάδες 9)

A2. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και T ένας θετικός αριθμός. Πότε λέμε ότι η f είναι περιοδική συνάρτηση, με περίοδο τον αριθμό T :

(Μονάδες 6)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, με την ένδειξη «Σ» αν είναι σωστή ή «Λ» αν είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το IR .
2. Για κάθε $x \in IR$ ισχύει: $|\sin x| \leq 1$.
3. Οι λύσεις του συστήματος: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 1 \end{cases}$ δίνουν τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2$ και της ευθείας $y = x - 1$.
4. Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο.
5. Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{1}{4}$ και $\sin\omega = \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

B1. Άν $\alpha \neq k \cdot \pi$, με $k \in Z$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sin\alpha} + \frac{1 + \sin\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$.

(Μονάδες 6)

B2. Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $A = \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{1+\sin\alpha}{\eta\mu\alpha}$, δεν μπορεί να πάρει την τιμή 1.

(Μονάδες 4)

B3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i) $\eta\mu x = 0$

(ii) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

(iii) $\eta\mu x = \sin x$, στο διάστημα $[0, 2\pi]$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(7\pi - 2x) + \sin\left(\frac{11\pi}{2} + 2x\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: (α) $\sin\left(\frac{11\pi}{2} + 2x\right) = \eta\mu 2x$

(β) $f(x) = 3\eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

Γ2. α) Να βρείτε την περίοδο της f , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.

β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\eta\mu 2x$					
$f(x) = 3\eta\mu 2x$					

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 9)

Γ3. α) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 3$.

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: (i) $\eta\mu 5x \cdot \sin 3x = \sin(-5x) \cdot \eta\mu 3x$

(ii) $f^2(x) + f(x) - 12 = 0$

(Μονάδες 4+3=7)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y = -\frac{1}{10} \\ x \cdot y = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

(Μονάδες 6)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα (α).

(Μονάδες 4)

Δ2. Για τις γωνίες α και β ισχύουν:

- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
- $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$
- $\eta\mu\alpha + \sigma\nu\beta = -\frac{1}{10}$ και
- $10\eta\mu\alpha \cdot \sigma\nu\beta = -3$

α) Να βρείτε τους αριθμούς ημα και συνβ.

(Μονάδες 5)

β) Αν $\eta\mu\alpha = -\frac{3}{5}$, τότε:

(i) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α .

(ii) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\nu(\alpha + \beta) = \frac{3\sqrt{3} - 4}{10}$

(iii) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

(Μονάδες 4+3+3=10)

Θέμα Α

A1. Έστω συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A .

- (i) Πότε λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του A .
- (ii) Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 7

A2. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη «Σ» αν είναι σωστή ή «Λ» αν είναι λανθασμένη.

- (1) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} , τότε $f(0) > f(-1)$.
- (2) Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δυο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.
- (3) Αν για την ορίζουσα D ενός γραμμικού συστήματος 2×2 ισχύει $D \neq 0$, τότε οι ευθείες που παριστάνονται οι εξισώσεις του τέμνονται.
- (4) Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ και η ευθεία $y = 1$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
- (5) Αν η συνάρτηση f έχει μέγιστο το 4, τότε η εξίσωση $f(x) = 5$ είναι αδύνατη.
- (6) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , τότε $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 12

A3. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + \frac{3}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 3y = -6 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -6x + 3y = 12 \end{cases}$$

με εκείνη από τις παρακάτω απαντήσεις (Α, Β, Γ) που θεωρείτε ότι είναι σωστή:

- (Α) έχει μοναδική λύση.
- (Β) έχει άπειρες λύσεις.
- (Γ) είναι αδύνατο.

(Σ_1)	(Σ_2)	(Σ_3)

Μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda+1)x + y = \lambda + 2 & (1) \\ 3x + (\lambda-1)y = 4 & (2) \end{cases}$$

B1. Αν $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$, να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) , με:

$$x_0 = \frac{\lambda+3}{\lambda+2}, \quad y_0 = \frac{1}{\lambda+2}$$

Μονάδες 8

B2. Για $\lambda = 2$, να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και να γράψετε τη μορφή αυτών των λύσεων.

Μονάδες 5

B3. Δίνεται και η εξίσωση: $xy = -5$ (3).

(i) Για $\lambda = 1$, να βρείτε τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (3).

Μονάδες 8

(ii) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος (i).

Μονάδες 4

Θέμα Γ

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - y = -1 \\ (\lambda + 1)x + \lambda y = -1 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ2. Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος και f η συνάρτηση με τύπο: $f(\lambda) = x_0 + y_0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

(i) $f(\lambda) = -\frac{\lambda}{\lambda^2 + \lambda + 1}$

Μονάδες 6

(ii) η f παρουσιάζει μέγιστο για $\lambda = -1$

Μονάδες 6

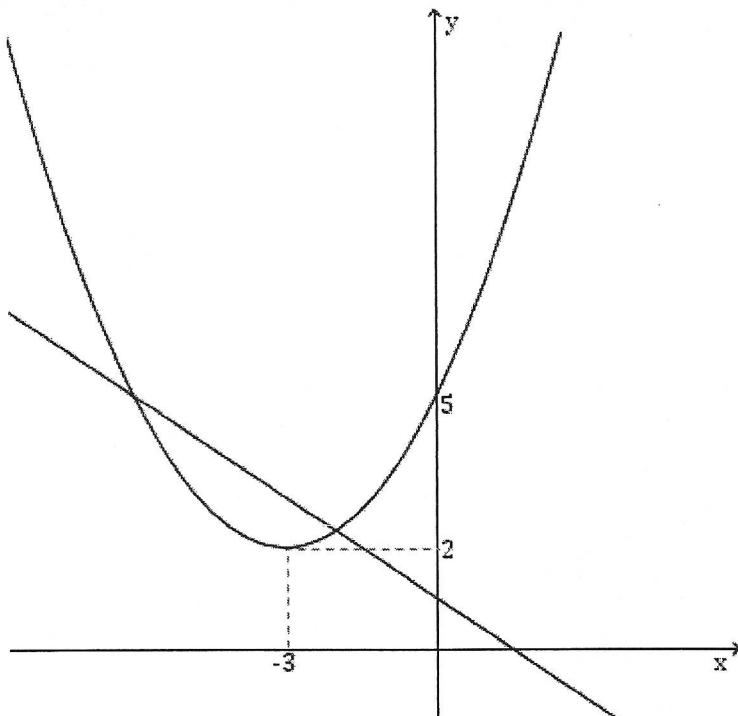
(iii) η f έχει ελάχιστη τιμή το $-\frac{1}{3}$.

Μονάδες 6

Θέμα Δ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ και της ευθείας } g(x) = -\frac{2}{3}x + 1.$$



Δ1. Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία $K(-3, 2)$ και $A(0, 5)$ να αποδείξετε ότι:

- (i) $\gamma = 5$
- (ii) $\beta = 6\alpha$
- (iii) $3\alpha - \beta = -1$
- (iv) $f(x) = \frac{1}{3}(x+3)^2 + 2$

Μονάδες 12

Δ2. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- (i) τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- (ii) το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων ευθείας και παραβολής.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Α

A1. Άν 0 < $\alpha \neq 1$ και $\kappa \in \text{IR}$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ιδιότητα:

$$\log_{\alpha} x^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha} x.$$

(Μονάδες 7)

A2. i) Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες;

ii) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

(Μονάδες 4+4=8)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, με την ένδειξη «Σ» αν είναι σωστή ή «Λ» αν είναι λανθασμένη.

1. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^{\ln x} = x$.
2. Ισχύει η ισοδυναμία: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$.
3. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f: A \rightarrow \text{IR}$ αποτελείται από τα $y \in \text{IR}$, για τα οποία υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = f(x)$.
4. Ισχύει $\log x^2 = 2 \cdot \log x$ για κάθε $x \neq 0$.
5. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , τότε η $-f$ παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{αν } x \leq 0 \\ -x+1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

B1. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

B2. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 7)

B3. Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε:

- i) τα ακρότατα και
- ii) το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 7)

B4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x^2 + 1$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(x^2 + 6x + 10)$.

Γ1. Να βρείτε δύο αριθμούς α και β έτσι, ώστε $x^2 + 6x + 10 = (x + \alpha)^2 + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η f έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
- ii. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x σε ένα μόνο σημείο.
- iii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο, το οποίο και να βρείτε.

(Μονάδες 3+4+5=12)

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x+3) - f(-x-3) = 0$.

(Μονάδες 5)

Γ4. Αν $g(x) = e^{f(x)}$ και $h(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 4x - 10}{x - 1}$, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} , στο οποίο ισχύει $h(x) = g(x)$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1 + e^x) + \alpha + \beta \cdot x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $M(0, \ln 2)$ και $N\left(1, \ln\left(\frac{1}{e} + 1\right)\right)$.

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

(Μονάδες 6)

Για τα ερωτήματα που ακολουθούν δίνονται: $\alpha=0$ και $\beta=-1$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 4)

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) = \ln(5e^{-2x})$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 1 - x$.

(Μονάδες 5)

Δ5. Αν $g(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$, να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$.

(Μονάδες 5)