

**ΘΕΜΑ Α**

**A<sub>1</sub>.** Για δύο ενδεχόμενα A, B δειγματικού χώρου  $\Omega$  να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(5 μονάδες)

**A<sub>2</sub>.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη «Σ» αν είναι σωστή ή «Λ» αν είναι λανθασμένη:

a) Ισχύει η ισοδυναμία:  $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0.$

Σ Λ

b) Για τα σύνολα των πραγματικών IR και των ρητών Q, ισχύει  $IR \cup Q = IR.$

Σ Λ

c) Άν A,B ασυμβίβαστα τότε  $A \cup B = \emptyset.$

Σ Λ

d) Για τα ενδεχόμενα A,B ισχύει:  $A \cap B' = A - B.$

Σ Λ

e) Για τα ενδεχόμενα A,B υποσύνολα του  $\Omega$  ισχύει:  $P(A \cap B) \leq P(A)$

Σ Λ

(10 μονάδες)

**A<sub>3</sub>.** Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε ερώτημα:

a) Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει :  $x > 3$  και  $x < 5.$  Ισοδύναμα, ο x είναι αριθμός:

- |                              |                        |                         |              |
|------------------------------|------------------------|-------------------------|--------------|
| A. μεταξύ του 3<br>και του 5 | B. μικρότερος<br>του 3 | C. μεγαλύτερος<br>του 5 | D. ίσος με 4 |
|------------------------------|------------------------|-------------------------|--------------|

b) Άν τα σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία τότε:

- |                    |                    |                           |                           |
|--------------------|--------------------|---------------------------|---------------------------|
| A. $A \subseteq B$ | B. $B \subseteq A$ | C. $A \cup B = \emptyset$ | D. $A \cap B = \emptyset$ |
|--------------------|--------------------|---------------------------|---------------------------|

c) Άν  $A = \{2, 3, 4\}$  και  $B = \{3, 4, 5\}$  υποσύνολα του  $\Omega = \{2, 3, 4, 5\},$  τότε  $(A \cap B)':$

- |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| A. $\{3, 4\}$ | B. $\{2, 4\}$ | C. $\{2, 5\}$ | D. $\{3, 5\}$ |
|---------------|---------------|---------------|---------------|

d) Άν η πιθανότητα να κερδίσουμε σε ένα παιγνίδι είναι 0,4, η πιθανότητα να μην κερδίσουμε είναι:

- |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|
| A. 0,2 | B. 0,4 | C. 0,6 | D. 0,8 |
|--------|--------|--------|--------|

e) Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Η πιθανότητα να φέρουμε και τις τρεις φορές την ίδια ένδειξη είναι:

- |                  |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| A. $\frac{1}{2}$ | B. $\frac{1}{4}$ | C. $\frac{1}{6}$ | D. $\frac{1}{8}$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|

(10 μονάδες)

## **ΘΕΜΑ Β**

Ένας μαθητής της Α' Λυκείου που γράφει ένα διαγώνισμα αποφασίζει να απαντήσει στην τύχη μία ερώτηση σωστού-λάθους ( $\Sigma$  ή  $\Lambda$ ) και μία ερώτηση πολλαπλής επιλογής (Α, Β, Γ ή Δ).

- α)** Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος, δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών συνδυασμών απάντησης στις δύο ερωτήσεις.

(5 μονάδες)

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

X: στην ερώτηση σωστού-λάθους απάντησε " $\Sigma$ ".

Y: στην ερώτηση επιλογής απάντησε "Β".

- β)** Να γράψετε με αναγραφή στοιχείων τα ενδεχόμενα X και Y.

(6 μονάδες)

- γ)** Να γράψετε με αναγραφή στοιχείων και με διάγραμμα Venn τα ενδεχόμενα:

i)  $X \cap Y$       ii)  $X'$       iii)  $Y - X$       iv)  $(X \cup Y)'$

(10 μονάδες)

- δ)** Θεωρώντας ότι μία απάντηση είναι η ορθή σε κάθε ερώτηση, ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής που απάντησε τυχαία να πέτυχε την ορθή απάντηση και στις δύο ερωτήσεις;

(4 μονάδες)

## **ΘΕΜΑ Γ**

Σε μια γιορτή που γίνεται σε ένα σπίτι βρίσκονται 11 ενήλικες και κάποια παιδιά: 4 αγόρια και 5 κορίτσια. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από το σπίτι.

Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο που επιλέξαμε:

- α)** να είναι ενήλικας.

(5 μονάδες)

- β)** να είναι αγόρι ή κορίτσι.

(5 μονάδες)

- γ)** να μην είναι αγόρι.

(5 μονάδες)

**δ)** Κάποιοι από τους ενήλικες φεύγουν από το σπίτι. Αν τώρα η πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία ένα κορίτσι είναι  $\frac{1}{3}$ :

- i) Πόσοι ενήλικες έχουν μείνει τώρα στο σπίτι;

(5 μονάδες)

- ii) Ποια είναι τώρα η πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία ενήλικα ή αγόρι;

(5 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Δ

Οι μαθητές ενός σχολείου μπορούν να επιλέξουν να συμμετέχουν σε μία ή περισσότερες καλλιτεχνικές δραστηριότητες. Το 60% επέλεξε να συμμετέχει στο μουσικό τμήμα, το 20% επέλεξε το τμήμα ζωγραφικής και το 10% επέλεξε να συμμετέχει και στα δύο τμήματα. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου ένας μαθητής που επιλέγεται τυχαία:

- i) να συμμετέχει τουλάχιστον σε ένα από τα δύο τμήματα.
- ii) να μην επέλεξε το μουσικό τμήμα.
- iii) να επέλεξε το μουσικό τμήμα και όχι το τμήμα ζωγραφικής.
- iv) να επέλεξε μόνο ένα από τα δύο τμήματα.
- v) να μην επέλεξε κανένα από τα δύο τμήματα.

(20 μονάδες)

β) Είναι δυνατόν το 50% των μαθητών να επιλέξει να συμμετέχει μόνο σε μαθήματα ενός τρίτου τμήματος, του θεατρικού;

(2 μονάδες)

γ) Αν 180 μαθητές επέλεξαν το πολύ ένα από τα δύο τμήματα τότε πόσοι είναι όλοι οι μαθητές του σχολείου (χρησιμοποιείστε διάγραμμα Venn);

(3 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Α

- A<sub>1</sub>. Αν η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , όπου  $\alpha \neq 0$ , έχει πραγματικές ρίζες  $x_1, x_2$ , να αποδείξετε ότι:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

(5 μονάδες)

- A<sub>2</sub>. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη «Σ» αν είναι σωστή ή «Λ» αν είναι λανθασμένη:

- a. Η εξίσωση  $3x + 1 = 3x + 1$ , έχει λύσεις όλους τους πραγματικούς αριθμούς      Σ    Λ
- β. Η εξίσωση  $2x = 0$ , είναι αδύνατη      Σ    Λ
- γ. Η εξίσωση  $x^3 = a$  έχει μοναδική λύση για κάθε  $a \in \mathbb{R}$       Σ    Λ
- δ. Ισχύει:  $|x| = -3 \Leftrightarrow x = 3$  ή  $x = -3$       Σ    Λ
- ε. Η εξίσωση  $(x - 2)^2 + 1 = 0$  είναι αδύνατη      Σ    Λ

(10 μονάδες)

- A<sub>3</sub>. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση:

- i) Η εξίσωση  $\alpha x = \beta$ , έχει μοναδική λύση όταν:

- A.  $\alpha = 0$       B.  $\alpha \neq 0$       C.  $\beta = 0$       D.  $\beta \neq 0$

- ii) Η εξίσωση  $x^2 = \alpha$ , έχει δύο διαφορετικές αντίθετες λύσεις όταν:

- A.  $\alpha > 0$       B.  $\alpha < 0$       C.  $\alpha \in \mathbb{R}$       D.  $\alpha = -1$

- iii) Αν ισχύει  $|x - 1| = x - 1$ , ισοδύναμα ισχύει:

- A.  $x \leq 0$       B.  $x \geq 0$       C.  $x \leq 1$       D.  $x \geq 1$

- iv) Αν  $\alpha \gamma < 0$  τότε η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ :

- A. έχει δύο άνισες ρίζες      B. έχει διπλή ρίζα  
C. είναι αδύνατη      D. έχει μοναδική λύση

- v) Η εξίσωση  $x^{11} + x^{10} + x^9 - 3 = 0$ , έχει λύση τον αριθμό:

- A.  $x = -1$       B.  $x = 0$       C.  $x = 1$       D.  $x = 3$

(10 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Β

**B<sub>1</sub>.** Δίνεται η εξίσωση  $\lambda x = \lambda(\lambda - 1)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση έχει μοναδική λύση;

(4 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντα λύση, οποιαδήποτε και αν είναι η τιμή του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ .

(5 μονάδες)

γ) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση έχει λύση το  $x = 1$ ;

(4 μονάδες)

**B<sub>2</sub>.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $4 - \frac{7-2x}{3} = \frac{x+10}{9}$

β)  $\frac{2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x-2} = -3$

γ)  $(x^3 + 5)(x^2 - 7) = 0$

(12 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ<sub>1</sub>.** α) Να αποδείξετε ότι: i)  $|1-x| = |x-1|$

ii)  $|3x-3| = 3|x-1|$

(1 μονάδα)

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|x-1|-2}{3}-1=|1-x|-\frac{|3x-3|}{2}$$

(4 μονάδες)

**Γ<sub>2</sub>.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $|x-3| = |x+5|$

β)  $|x-4| + 2x = 5$

γ)  $(|x|+2)^2 - 16 = 0$

(12 μονάδες)

**Γ3.** α) Να λύσετε την εξίσωση:  $y^2 - y - 2 = 0$

(2 μονάδες)

β) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i)  $x^4 - x^2 - 2 = 0$

ii)  $(2x - 1)^2 - |2x - 1| - 2 = 0$

(6 μονάδες)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - (2\mu + 1)x + \mu = 0$ , όπου  $\mu \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε τιμή του  $\mu$ .

(6 μονάδες)

β) Να λύσετε την εξίσωση για  $\mu = 0$ .

(6 μονάδες)

γ) Να βρείτε την τιμή του  $\mu$  ώστε η εξίσωση να έχει ρίζα το 2.

(5 μονάδες)

δ) Αν η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες  $x_1, x_2$ , να βρείτε την τιμή του  $\mu$ , ώστε να ισχύει:

$$x_1^2 x_2^3 + x_1^3 x_2^2 = 0.$$

(4 μονάδες)

ε) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει καμία τιμή του  $\mu$  ώστε οι ρίζες να είναι αρνητικές.

(4 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Α

**A<sub>1</sub>.** Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

(3 μονάδες)

**A<sub>2</sub>.** Να αποδείξετε ότι για  $\beta \neq 0$  και  $\delta \neq 0$  ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

(4 μονάδες)

**A<sub>3</sub>.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη «Σ» αν είναι σωστή ή «Λ» αν είναι λανθασμένη:

**a)** Αν οι α, β είναι αντίθετοι, τότε  $\alpha + \beta = 0$

Σ Λ

**b)** Ισχύει ότι:  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ , για όλους τους πραγματικούς α, β, γ

Σ Λ

**γ)** Ισχύει ότι:  $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  ή  $\beta = 0$

Σ Λ

**δ)** Για  $\alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$  ισχύει:  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$

Σ Λ

**ε)** Ισχύει ότι:  $(\alpha - \beta)^2 = (\beta - \alpha)^2$

Σ Λ

(10 μονάδες)

**A<sub>4</sub>.** Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση:

**α)** Το γινόμενο των αντίστροφων αριθμών είναι ίσο με:

**A.** -1

**B.** 0

**Γ.** 1

**Δ.** 2

**β)** Ο αριθμός  $-\alpha$ :

**A.** είναι θετικός

**B.** είναι αρνητικός

**Γ.** είναι μηδέν

**Δ.** είναι οποιοσδήποτε αριθμός

**γ)** Η παράσταση  $\frac{1}{x^2 + 1}$  ορίζεται για κάθε:

**A.**  $x \neq 0$

**B.**  $x \neq 1$

**Γ.**  $x \neq 1$  και  $x \neq -1$

**Δ.** πραγματικό αριθμό

**δ)** Είναι  $(-\alpha - \beta)^2 =$ :

**A.**  $(\alpha + \beta)^2$

**B.**  $(\alpha - \beta)^2$

**Γ.**  $(\beta - \alpha)^2$

**Δ.**  $-(\alpha + \beta)^2$

(8 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Β

B<sub>1</sub>. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

a)  $(2x+1)^2 =$

b)  $(y-1)^3 =$

c)  $(2\alpha-3)(2\alpha+3) =$

d)  $(-3+\beta)^2 =$

(16 μονάδες)

B<sub>3</sub>. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις (με παραγοντοποιήσεις).

a)  $A = \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-x}$

b)  $B = \frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-1} \cdot \frac{x^3+x}{x^3-2x^2+x}$

(9 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Γ

Γ<sub>1</sub>. a) Να απλοποιήσετε την παράσταση:  $\Pi = \frac{(x^{-2} \cdot y)^3 \cdot (x \cdot y^3)^{-2}}{\frac{1}{x^6 y^5}}$

b) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Π όταν  $x = 6$  και  $y = 18$ .

(5 μονάδες)

Γ<sub>2</sub>. a) Να αποδείξετε ότι:  $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

(5 μονάδες)

b) Δίνονται οι παραστάσεις:  $K = \frac{3x-3}{x^2-x-2} - \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x-2}$  και  $\Lambda = \frac{5x+5}{x-2}$ .

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις K και Λ.

ii) Να αποδείξετε μετά από πράξεις ότι  $K = -\frac{x-2}{x+1}$ .

(10 μονάδες)

γ) Να αποδείξετε ότι  $K \cdot \Lambda = -5$ .

(5 μονάδες)

## ΘΕΜΑ Δ

Δ<sub>1</sub>. Να αποδείξετε ότι:  $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2 + y^2)$

(5 μονάδες)

Δ<sub>2</sub>. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί  $\kappa, \lambda$  με  $\kappa \neq \lambda$  για τους οποίους ισχύει  $\frac{3\kappa - 5\lambda}{\kappa - \lambda} = 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 3\lambda$ .

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $M = \frac{\kappa^2 + 3\lambda^2}{\kappa \cdot \lambda}$ .

(7 μονάδες)

Δ<sub>3</sub>. α) Να αποδείξετε ότι:  $(2\alpha + 1)^2 - (2\beta - \alpha)(2\beta + \alpha) - (\alpha + 2)^2 + 3 = 4(\alpha^2 - \beta^2)$

β) Αν ισχύει  $(2\alpha + 1)^2 - (2\beta - \alpha)(2\beta + \alpha) - (\alpha + 2)^2 + 3 = 0$  και  $\alpha \neq \beta$ , να αποδείξετε ότι οι

$\alpha, \beta$  είναι αντίθετοι.

(8 μονάδες)

Δ<sub>4</sub>. Αν  $\varphi, \omega$  αντίστροφοι να αποδείξετε ότι:  $(\varphi - \omega)^2 - (\varphi - \omega)(\varphi + \omega) = 2(\omega - 1)(\omega + 1)$ .

(5 μονάδες)