ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Ταλαντώσεις – Κρούσεις – Κύματα – Doppler – Ρευστά – – Στερεό (έως στροφορμή)

Θέμα 1ο

1. Λεπτή ομογενής ράβδος έχει μήκος L και μάζα m. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς σταθερό άξονα (ε) που είναι παράλληλος στη ράβδο και απέχει από αυτή απόσταση d, δίνεται από τη σχέση:

α. $I_{(\varepsilon)} = \frac{1}{12} mL^2$ **β.** $I_{(\varepsilon)} = md^2$ **γ.** $I_{(\varepsilon)} = \frac{1}{3} m(L+d)^2$ **δ.** $I_{(\varepsilon)} = \frac{1}{3} md^2$

Μονάδες 5

2. Σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση. Για τα τρία διαδοχικά πλάτη A_3, A_4, A_5, ισχύει:

α. $A_4 = \frac{A_3 + A_5}{2}$ **β.** $A_5 = \sqrt{A_3 \cdot A_4}$ **γ.** $A_4^2 = A_3 \cdot A_5$ **δ.** $A_4 = \frac{A_3^2}{A_5}$

Μονάδες 5

3. Ένα σημείο γραμμικού αρμονικού κύματος βρίσκεται για 5η φορά σε απόσταση 0,5Α από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του. Επομένως θα έχει φάση λόγω ταλάντωσης:

α. $\frac{5\pi}{6}$ **β.** $\frac{7\pi}{6}$ **γ.** $\frac{7\pi}{3}$ **δ.** $\frac{13\pi}{6}$

Μονάδες 5

4. Ομογενής δίσκος και ομογενής δακτύλιος της ίδιας μάζας και ακτίνας μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό τους. Αν στην περιφέρεια του δίσκου και του δακτυλίου ενεργήσει εφαπτομενική δύναμη ίδιου μέτρου, τότε:

α. μεγαλύτερη επιτάχυνση θα αποκτήσει ο δακτύλιος.

β. μεγαλύτερη επιτάχυνση θα αποκτήσει ο δίσκος.

γ. θα αποκτήσουν την ίδια επιτάχυνση, αφού έχουν την ίδια μάζα.

δ. θα αποκτήσουν την ίδια επιτάχυνση, αφού έχουν την ίδια μάζα και ακτίνα.

Μονάδες 5

5. Σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση. Τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας:

α. ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι μέγιστος και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι μηδέν.

β. ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι μέγιστος και ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι μηδέν.

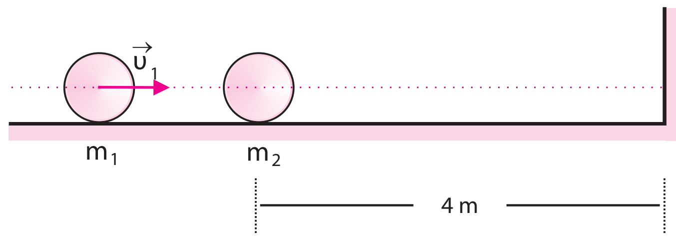
γ. και οι δύο ρυθμοί μεταβολής δυναμικής και κινητικής είναι μέγιστοι.

δ. και οι δύο ρυθμοί μεταβολής δυναμικής και κινητικής είναι μηδέν.

Μονάδες 5

Θέμα 2ο

1. Η σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με την ακίνητη σφαίρα μάζας m_2, η οποία στη συνέχεια συγκρούεται ελαστικά με τον τοίχο. Τελικά η απόσταση των δύο σφαιρών διατηρείται σταθερή, ίση με x, καθώς οι σφαίρες κινούνται στο λείο επίπεδο.



α. Για τις μάζες των σφαιρών ισχύει:

i. $m_1 = m_2$ **ii.** $m_1 = 2m_2$ **iii.** $3m_1 = m_2$

Μονάδες 1

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 5

β. Για τη σταθερή απόσταση x ισχύει:

i. $x = 4$ m **ii.** $x = 8$ m **iii.** $x = 12$ m

Μονάδες 1

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 5

2. Σώμα μάζας $m = 5$ kg κινείται σε οριζόντιο δάπεδο δεμένο στην άκρη ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200\,\frac{N}{m}$ του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητο. Κάποια χρονική στιγμή το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με ταχύτητα μέτρου υ_0, με αποτέλεσμα να σταματά στιγμιαία μετά από απόσταση 10 cm. Μεταξύ σώματος και δαπέδου έχουμε συντελεστή τριβής $\mu = 0{,}5$. Το μέτρο της ταχύτητας υ_0 είναι ίσο με:

α. $5\,\frac{m}{s}$ **β.** $\sqrt{5}\,\frac{m}{s}$ **γ.** $2{,}5\,\frac{m}{s}$

Μονάδες 1

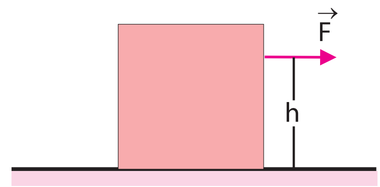
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 5

Δίνεται $g = 10\,\frac{m}{s^2}$.

3. Ομογενής κύβος μάζας m και με πλευρά μήκους d κινείται με σταθερά επιτάχυνση (α) λόγω της επίδρασης σταθερής οριζόντιας δύναμης πάνω σε ιδανικό λείο οριζόντιο δάπεδο. Η

δύναμη ασκείται σε σημείο που απέχει $h = \frac{3d}{4}$ από το έδαφος. Να προσδιορίσετε το διάνυσμα της αντίδρασης του δαπέδου που δέχεται ο κύβος από το δάπεδο. Η δύναμη και το κέντρο μάζας του κύβου βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.
Δίνονται: α, g και d



Μονάδες 7

Θέμα 3ο

Δύο σημεία $Π_1$ και $Π_2$ της επιφάνειας υγρού, τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζουν να εκτελούν αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y = 0{,}08ημ(10πt)$ (SI), δημιουργώντας δύο επιφανειακά κύματα μήκους κύματος $λ = 8$ cm. Σημείο Σ απέχει απόσταση $r_1 = 30$ cm από την πηγή $Π_1$ και απόσταση $r_2 = 40$ cm από την πηγή $Π_2$.

α. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης του Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που το Σ θα αποκτήσει για πρώτη φορά απομάκρυνση $0{,}04\sqrt{2}$ m.

Μονάδες 6

γ. Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Μονάδες 4

δ. Να προσδιορίσετε πόσα σημεία μεταξύ του Σ και του Μ είναι διαρκώς ακίνητα ή ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος μετά τη συμβολή των κυμάτων στο σημείο Σ. Το σημείο Μ είναι το μέσο του τμήματος $Π_1Π_2 = 50$ cm.

Μονάδες 4

ε. Να υπολογίσετε την ελάχιστη μεταβολή στο μήκος κύματος των δύο κυμάτων, ώστε το σημείο Σ μετά τη συμβολή να ταλαντώνεται με πλάτος $A_Σ = 0{,}16$ m.

Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Μια ομογενής σφαίρα μάζας $m = 3{,}5$ kg αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου κλίσης $φ°$ ($ημφ = 0{,}8$ και $συνφ = 0{,}6$). Αρχικά το κεκλιμένο επίπεδο είναι ιδανικά λείο και μετά από 1 m εμφανίζει με τη σφαίρα συντελεστή τριβής $μ = 0{,}5$.

α. Να υπολογίσετε τη μεταφορική και τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας από τη στιγμή που την αφήσαμε μέχρι να φθάσει στο τραχύ τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που αφήσαμε τη σφαίρα μέχρι τη στιγμή που αρχίζει να κυλάει χωρίς ολίσθηση.

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας τη στιγμή που αρχίζει να κυλάει χωρίς ολίσθηση.

Μονάδες 4

δ. Να υπολογίσετε την τριβή που δέχεται η σφαίρα κατά τη διάρκεια της κίνησης της στο τραχύ τμήμα του κεκλιμένου επιπέδου.

Μονάδες 6

Δίνονται η ροπή αδράνειας ομογενούς σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{2}{5} mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

Θέμα 1ο

1. β (Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας)

2. γ

3. δ

4. β (Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας ο δακτύλιος έχει τη μεγαλύτερη και σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο θα έχει τη μικρότερη επιτάχυνση)

5. δ

Θέμα 2ο

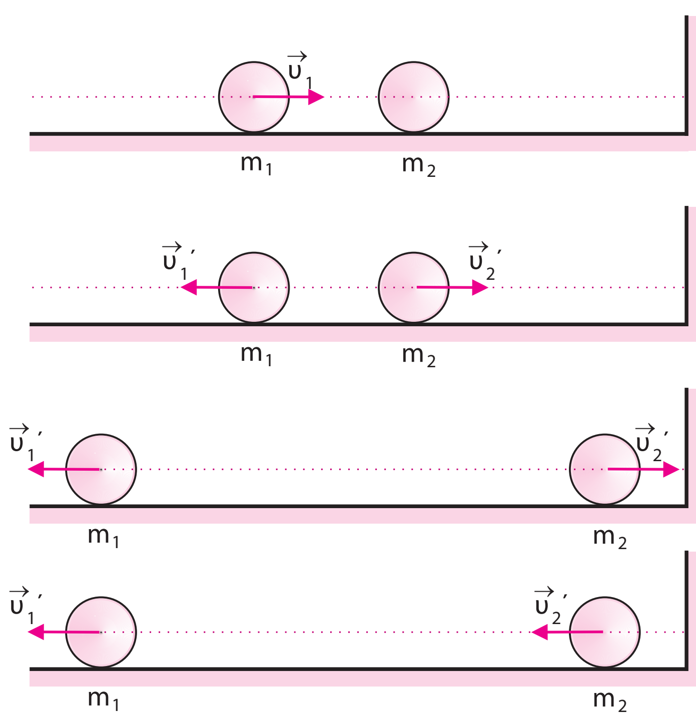
1. α. iii. β. ii.

1η κρούση: Ισχύουν:

$$-\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \;\; ή \;\; \upsilon_1' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \quad (1)$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 \quad (2)$$

2η κρούση: το σώμα m_2 θα επιστρέψει με ταχύτητα ίδιου μέτρου δηλαδή υ_2'.



Για να διατηρείται σταθερή η μεταξύ τους απόσταση θα πρέπει:

$$υ_1' = υ_2' \ \text{ή}\ \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot υ_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot υ_1 \ \text{ή}\ m_2 - m_1 = 2m_1 \ \text{ή}\ m_2 = 3m_1$$

Εφόσον οι ταχύτητες είναι ίσες το σώμα m_1 θα έχει διανύσει την ίδια απόσταση με το m_2 να φθάσει στον τοίχο δηλαδή 4 m. Επομένως η μεταξύ τους απόσταση θα είναι $4 + 4 = 8$ m.

2. β

Από τη θέση ισορροπίας μέχρι το στιγμιαίο σταμάτημα εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ

$$W_{ολ.} = ΔK \ \text{ή}\ W_{Fελ.} + W_T + W_B + W_N = K_{τελ.} - K_{αρχ.} \ \text{ή}$$

$$[\frac{1}{2}ky_{αρχ.} - \frac{1}{2}ky_{τελ.}] - Tx + 0 + 0 = 0 - \frac{1}{2}mυ^2 \ \text{ή}$$

$$0 - \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0{,}1 - μmgx = -\frac{1}{2} \cdot 5υ^2 \ \text{ή}\ 10 + 0{,}5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 2{,}5υ^2 \ \text{ή}$$

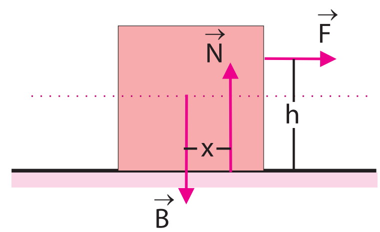
$$12{,}5 = 2{,}5υ^2 \ \text{ή}\ υ^2 = 5 \ \text{ή}\ υ = \sqrt{5}\frac{m}{s}$$

3. Θ.Ν. μεταφορικής

$$ΣF_x = mα_{cm} \ \text{ή}\ F = mα \ \ (1)$$

Θ.Ν. στροφικής

$$Στ_{cm} = 0 \ \text{ή}\ τ_F = τ_N \ \text{ή}\ F\left(\frac{3d}{4} - \frac{d}{2}\right) = Nx \ \text{ή}\ F\frac{d}{4} = mgx \ \ (2)$$



Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν:

$$mα\frac{d}{4} = mgx \ \text{ή}\ x = \frac{αd}{4g}$$

Θέμα 3ο

Έχουμε για τα δύο παραγώμενα κύματα:

$$y_1 = y_2 = 0{,}08ημ(10)\ SI$$

Άρα:

$A = 0{,}08$ m (για κάθε κύμα)

$ω = 10π\frac{rad}{s}$, οπότε $2πf = 10π$ ή $f = 5$ Hz και $T = 0{,}2$ s

$λ = 0{,}08$ m

$c = λ \cdot f$ ή $c = 0{,}08 \cdot 5$ ή $c = 0{,}4\frac{m}{s}$

Βρίσκουμε τις χρονικές στιγμές που κάθε κύμα φθάνει στο σημείο Σ.

$$t_1 = \frac{r_1}{c} \ \text{ή}\ t_1 = \frac{0{,}3}{0{,}4} \ \text{ή}\ t_1 = \frac{3}{4} \ \text{ή}\ t_1 = 0{,}75\ s$$

$$t_2 = \frac{r_2}{c} \ \text{ή}\ t_2 = \frac{0{,}4}{0{,}4} \ \text{ή}\ t_2 = 1\ s$$

α. Για το σημείο Σ διακρίνουμε τρεις φάσεις:

1η φάση: στο σημείο Σ δεν έχει φθάσει κύμα.

$$y_\Sigma = 0, \text{ για } 0 \leq t < 0{,}75 \text{ s}$$

2η φάση: στο σημείο Σ έχει φθάσει το κύμα από την κοντινή πηγή Π_1.

$$y_\Sigma = 0{,}08\eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{0{,}3}{0{,}08}\right) \text{ ή } y_\Sigma = 0{,}08\eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{15}{4}\right) \text{SI, για } 0{,}75 \leq t < 1 \text{ s}$$

3η φάση: στο σημείο Σ έχει φθάσει και το κύμα από τη μακρινή πηγή Π_2 δηλαδή έχουμε συμβολή των κυμάτων.

$$y_\Sigma = 2 \cdot 0{,}08\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_2 - r_1}{2\lambda}\right)\eta\mu\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \text{ ή}$$

$$y_\Sigma = 0{,}16\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{0{,}4 - 0{,}3}{2 \cdot 0{,}08}\right)\eta\mu\left(5t - \frac{0{,}3 + 0{,}4}{2 \cdot 0{,}08}\right) \text{ ή } y_\Sigma = 0{,}16\sigma\upsilon\nu\pi\left(\frac{0{,}1}{0{,}08}\right)\eta\mu\left(5t - \frac{0{,}7}{0{,}16}\right) \text{ ή}$$

$$y_\Sigma = 0{,}16\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right)\eta\mu\left(5t - \frac{35}{8}\right) \text{ ή } y_\Sigma = -0{,}08\sqrt{2}\eta\mu\left(5t - \frac{35}{8}\right) \text{ SI, για } t \geq 1 \text{ s}$$

β. Για 1η φορά $y_\Sigma = 0{,}04\sqrt{2}$ m αφορά τη φάση ΙΙ και πρέπει $t > 0{,}75$ s. Ισχύει:

$$0{,}04\sqrt{2} = 0{,}08\eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{15}{4}\right) \text{ ή } \eta\mu 2\pi\left(5t + \frac{15}{4}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4} \text{ ή}$$

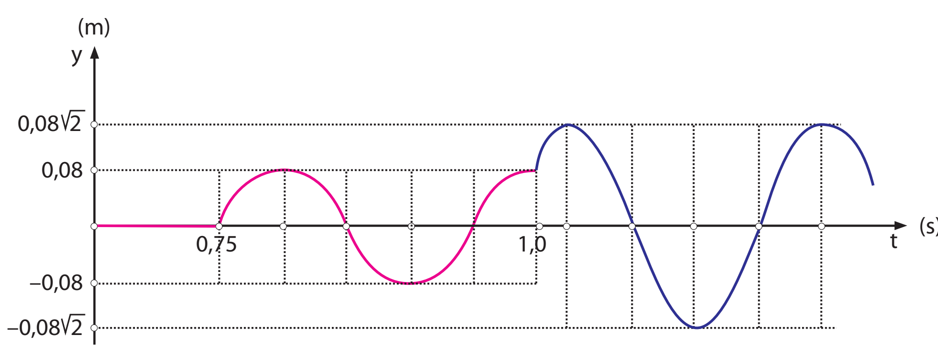
$$2\pi\left(5t + \frac{15}{4}\right) = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ και } 2\pi\left(5t + \frac{15}{4}\right) = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ ή}$$

$$5t + \frac{15}{4} = k + \frac{1}{8} \text{ και } 5t + \frac{15}{4} = k + \frac{3}{8} \text{ ή}$$

$$t = \frac{8k}{40} - \frac{29}{40} \text{ και } t = \frac{8k}{40} - \frac{27}{40}$$

Πρέπει $t > 0{,}75 = \frac{30}{40}$, άρα δεκτή μικρότερη τιμή για $k = 8$ η τιμή $t = \frac{35}{40} = 0{,}875$ s.

γ. Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι:



Τη στιγμή t = 1 s φθάνει το κύμα από την πηγή Π_2 με αποτέλεσμα το σημείο να κινείται προς τα πάνω, εφόσον κάθε σημείο κάνει ότι και η πηγή δηλαδή κινείται προς τα θετικά. Για μεγαλύτερη ακρίβεια βρίσκουμε τη στιγμή που το σημείο μετά τη συμβολή φθάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσης (1,025 s).

δ. Για τις υπερβολές ισχύει:

$$|r_2 - r_1| = \mu\frac{\lambda}{2} = 0{,}04\mu \text{ (άρτιος για ενίσχυση και περιττός για απόσβεση)}$$

Για το σημείο Σ έχουμε:

$$|r_2 - r_1| = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1 = \frac{0{,}1}{0{,}04}\cdot 0{,}04 = 2{,}5\frac{\lambda}{2}$$

Επομένως στο ευθύγραμμο τμήμα ΣΜ έχουμε ένα σημείο ακίνητο (για $\mu = 1$) και ένα σημείο με μέγιστο πλάτος 2Α (για $\mu = 2$).

Η τιμή $\Pi_1\Pi_2 = D = 50$ cm εξασφαλίζει το πλήθος των υπερβολών ενίσχυσης και απόσβεσης.

ε. Με τη μεταβολή του λ αλλάζει το πλήθος και η θέση των υπερβολών. Για να έχουμε πλάτος 0,16 = 2Α για το Σ πρέπει να βρίσκεται σε υπερβολή ενίσχυσης, δηλαδή:

$$|r_2 - r_1| = 0{,}1 = \mu\frac{\lambda'}{2} \text{ (μ άρτιος)}$$

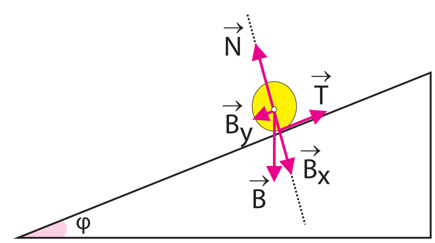
1η περίπτωση: $\mu = 2$, οπότε: $0{,}1 = 2\frac{\lambda'}{2}$ ή $\lambda' = 0{,}1$ m. Αύξηση κατά $1 - 0{,}08 = 0{,}02$ m.

2η περίπτωση: $\mu = 4$, οπότε: $0{,}1 = 4\frac{\lambda'}{2}$ ή $\lambda' = 0{,}05$ m. Μείωση κατά $0{,}08 - 0{,}05 = 0{,}03$ m.

Επομένως η μικρότερη μεταβολή είναι αύξηση κατά 0,02 m στο μήκος κύματος.

Θέμα 4ο

Η σφαίρα βρίσκεται στο λείο τμήμα του κεκλιμένου και έχουμε τις δυνάμεις που ενεργούν σε αυτή. Οι δυνάμεις διέρχονται από το κέντρο μάζας της σφαίρας άρα στροφικά ισορροπεί.



Θ.Ν. μεταφορικής

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm1} \text{ ή } mg\eta\mu\varphi = m\alpha_{cm1} \text{ ή } \alpha_{cm1} = g\eta\mu\varphi \text{ ή}$$

$$\alpha_{cm1} = 8\frac{m}{s^2}$$

Εξισώσεις κίνησης

$$x_1 = \frac{1}{2}\alpha_{cm1}t_1^2 \text{ ή } 1 = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot t_1^2 \text{ ή } t_1 = 0{,}5 \text{ s}$$

$$\upsilon_{cm1} = \alpha_{cm1}t \text{ ή } \upsilon_{cm1} = 8\cdot 0{,}5 \text{ ή } \upsilon_{cm1} = 4\frac{m}{s}$$

α. $\alpha_{cm} = 8\frac{m}{s}$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu} = 0$

Η σφαίρα εισέρχεται στο τραχύ τμήμα του κεκλιμένου, οπότε θα ενεργήσει πάνω της τριβή ολίσθησης ($T = \mu N = \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi$) που θα δώσει γωνιακή επιτάχυνση, ενώ ταυτόχρονα θα μειώσει τη μεταφορική επιτάχυνση.

Θ.Ν. μεταφορικής

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm2} \text{ ή } mg\eta\mu\varphi - \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi = m\alpha_{cm2} \text{ ή } \alpha_{cm2} = 5\,\frac{m}{s^2}$$

Θ.Ν. στροφικής

$$\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu 2} \text{ ή } \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi R = \frac{2}{5}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu 2} \text{ ή } \alpha_{\gamma\omega\nu 2} = \frac{7{,}5}{R} \quad (1)$$

Εξισώσεις κίνησης

$$\upsilon_{cm2} = \upsilon_{cm2} + \alpha_{cm2}t \text{ ή } \upsilon_{cm2} = 4 + 5t' \ (2)$$

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu 2}t' \text{ ή } \omega = \frac{7{,}5}{R}\cdot t' \ (3)$$

Η σφαίρα θα αρχίσει να κυλάει χωρίς ολίσθηση όταν θα ισχύει:

$$\upsilon_{cm2} = \omega R \text{ ή } 4 + 5t' = \frac{7{,}5}{R}\cdot t'\cdot R \text{ ή } t' = 1{,}6 \text{ s}$$

$$\text{Η (2) μας δίνει: } \upsilon_{cm2} = 12\,\frac{m}{s}$$

β. Το σώμα θα αρχίσει να κυλάει χωρίς ολίσθηση τη χρονική στιγμή: $t = 0{,}5 + 1{,}6 = 2{,}1$ s.

γ. Τη στιγμή που αρχίζει η κύλιση χωρίς ολίσθηση θα έχει: $\upsilon_{cm2} = 12\,\frac{m}{s}$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση:

$$\alpha_{cm3} = \alpha_{\gamma\omega\nu 3}R \quad (4)$$

Θ.Ν. μεταφορικής

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm3} \text{ ή } mg\eta\mu\varphi - T = m\alpha_{cm3} \quad (5)$$

Θ.Ν. στροφικής

$$\Sigma\tau = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu 3} \text{ ή } TR = \frac{2}{5}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu 3} \text{ ή } T = \frac{2}{5}mR\alpha_{\gamma\omega\nu 3} \text{ ή } T = \frac{2}{5}m\alpha_{cm3} \quad (6)$$

Με προσθήκη κατά μέλη των σχέσεων (5) και (6) έχουμε: $\alpha_{cm3} = \frac{40}{7}\,\frac{m}{s^2}$

$$\text{Η (1) δίνει: } T = T = \frac{2}{5}\cdot 3{,}5\cdot\frac{40}{7} \text{ ή } T = 8 \text{ N}$$

δ. Η τριβή ολίσθησης είναι:

$$T = 0{,}5\cdot 3{,}5\cdot 10\cdot 0{,}6 \text{ ή } T = 10{,}5 \text{ N}$$

Η στατική τριβή είναι:

$$T = 8 \text{ N}$$