Ζήτημα 1^0

1. Ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Η εξίσωση από την οποία υπολογίζουμε την κινητική του ενέργεια είναι η: $K = 0{,}04\sigma\upsilon\nu^2(2t + \frac{\pi}{4})$ SI

Ακόμα τη στιγμή 0 το σώμα έχει θετική ταχύτητα. Το μεγαλύτερο μέτρο που έχει η δύναμη επαναφοράς είναι ίσο με 0,4Ν. Τότε:

α. η εξίσωση από την οποία υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή της ταχύτητας είναι η

$\upsilon = 0{,}2\sigma\upsilon\nu(2t - \frac{\pi}{4})$ SI

β. η ολική ενέργεια του ταλαντωτή είναι ίση με 0,08Joules

γ. η εξίσωση από την οποία υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή της απομάκρυνσης είναι η: $\chi = 0{,}2\eta\mu(2t - \frac{\pi}{2})$ SI

δ. η εξίσωση από την οποία υπολογίζουμε την αριθμητική τιμή της επιτάχυνσης είναι

$a = 0{,}8\sigma\upsilon\nu(2t + \frac{3\pi}{4})$ SI

2. Ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση ,κάποια στιγμή βρίσκεται στη θέση Γ που η απομάκρυνση είναι ιση με Α/2 (Α το πλάτος ταλάντωσης) έχοντας κινητική ενέργεια K_1και κινείται προς τη θέση ισορροπίας. Κάποια επόμενη στιγμή, , βρίσκεται στη θέση Δ και η κινητική του ενέργεια ξαναγίνεται (για πρωτη φορά)πάλι K_1, ενώ κινείται προς τη πλησιέστερη ακραία θέση

τότε:

α. χρόνος κίνησης από τη θέση Γ στη θέση Δ είναι ισος με Τ/4

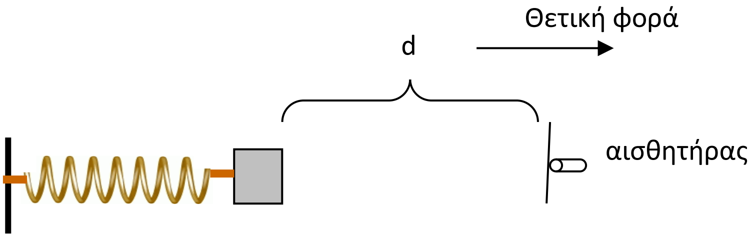
β. η απόσταση ΓΔ είναι ίση με Α/2

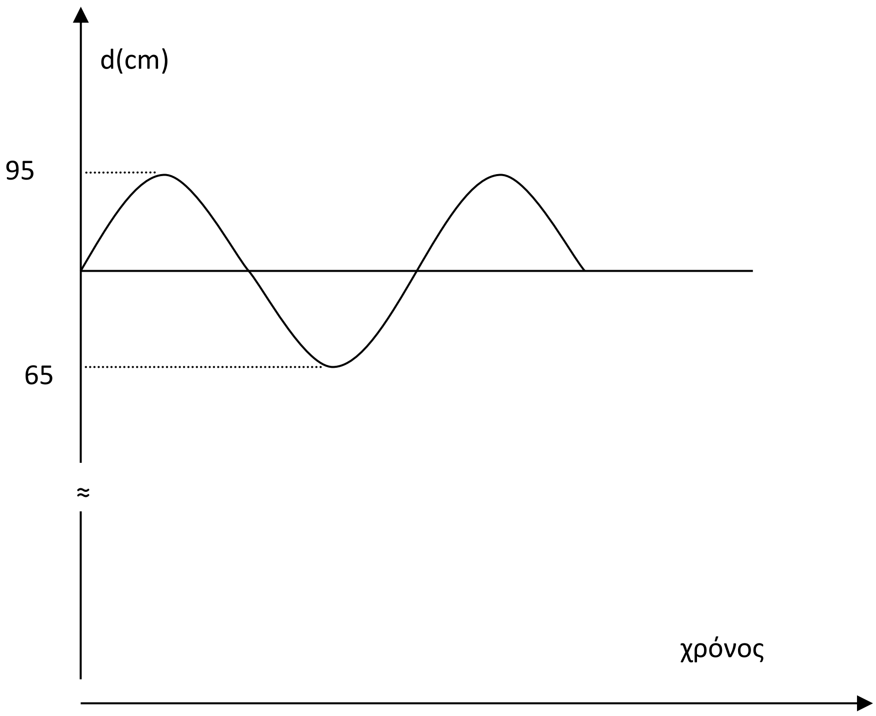
γ. για την επιτάχυνση στις θέσεις Γ και Δ ισχύει: $a_\Gamma = -a_\Delta$

3. Ένα σώμα είναι δεμένο στην άκρη ελατηρίου και το σύστημα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Ένας αισθητήρας βρίσκεται και μετρά την απόσταση d του σώματος από τον αισθητήρα. Η καταγραφή (απόστασης κάθε στιγμή) σε Η/Υ μας δίνει το διάγραμμα που σας δίνεται, τότε:

α. η θέση ισορροπίας του σώματος, όταν βρίσκεται στη ΘΙ, απέχει από τον ανιχνευτή 65 εκατοστά

β. η εξίσωση για τη απομάκρυνση από τη ΘΙ είναι η $x = 15\eta\mu\omega t$ $\chi \to$ cm γ. η εξίσωση για την αριθμητική τιμή της ταχύτητας είναι η: $\upsilon = -\omega A \sigma \upsilon \nu \omega t$





4. Ένα σώμα είναι δεμένο στην άκρη ελατηρίου και το σύστημα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Τότε:

α. το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από τη στιγμή που μεγιστοποιείται η κινητική ενέργεια μέχρι να ξαναγίνει μέγιστη είναι ισο με μια περίοδο

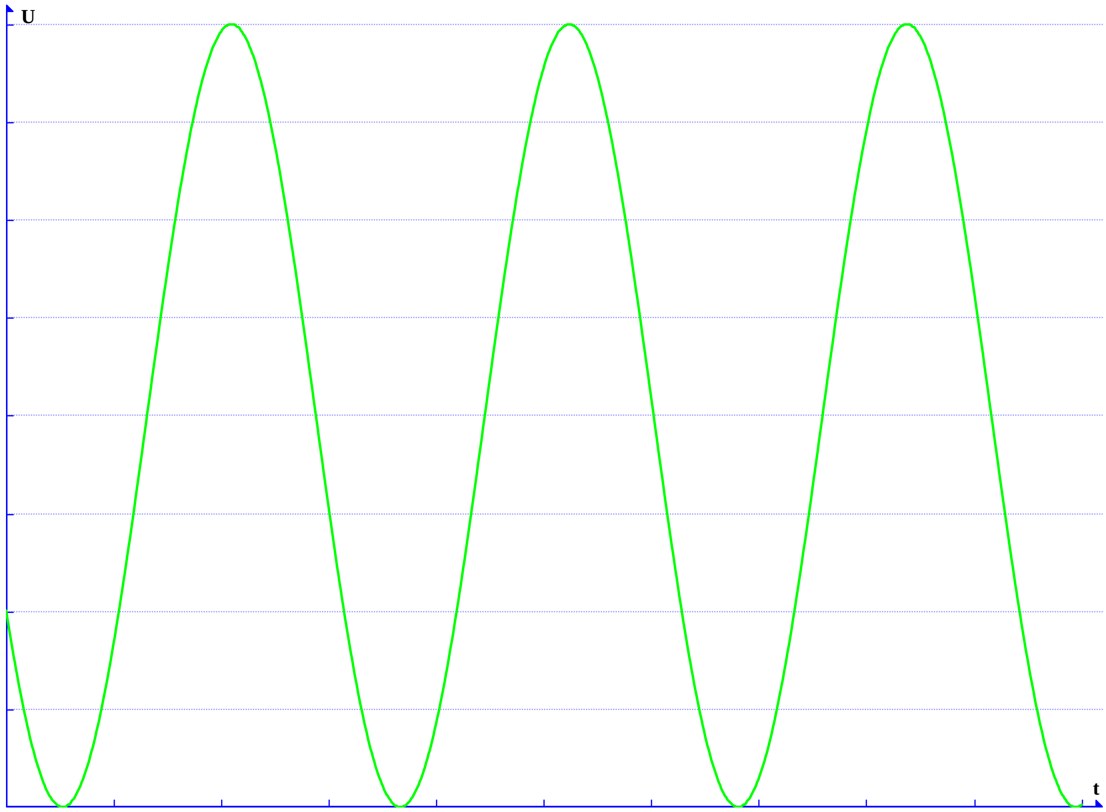
β. η φάση της ταχύτητας είναι μικρότερη κατά π/2 από τη φάση της επιτάχυνσης αν εκφρασθούν με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό

γ. το πηλίκο $\frac{\Sigma F_{\varepsilon\pi\alpha\nu}}{x}$ παίρνει τιμή 0 όταν το σώμα διέρχεται από τη ΘΙ

δ. τίποτα από τα παραπάνω

5.

. Ένα σώμα είναι δεμένο στην άκρη ελατηρίου και το σύστημα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Η δυναμική του ενέργεια μεταβάλλεται όπως δείχνει το διάγραμμα Τη στιγμή 0,βρισκεται στη θέση Δ και απομάκρυνση έχει αρνητική τιμή Τότε:



α. η απομάκρυνση στη θέση Δ είναι ιση με $\frac{A\sqrt{2}}{2}$

β . η εξίσωση για την απομάκρυνση είναι η $x = A\eta\mu(\omega t + \frac{11\pi}{6})$

γ. για τη θέση Δ έχουμε $\frac{U}{K} = 4$

Ζήτημα 2^o

1. Ένα σώμα είναι δεμένο στην άκρη ελατηρίου και το σύστημα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση, αν χ=A/3 να υπολογίσετε το πηλίκο $\frac{U}{K}$ για τη θέση αυτή
2. Ένα σώμα είναι δεμένο στην άκρη ελατηρίου και το σύστημα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $x = 0{,}2\eta\mu\omega t$ SI

α. να δείξετε ότι $\omega^2 x^2 + \upsilon^2 = \upsilon_{max}^2$

β. σε μια θέση ισχύει ότι $\frac{U}{K} = 3$ και το σώμα κατευθύνεται στη πλησιέστερη ακραία θέση. Να αποδείξετε ότι από τη θέση αυτή μέχρι να φθάσει στην ακραία κάνει χρόνο T/12 όπου T η περίοδος ταλάντωσης

γ. αν σε μια θέση η φάση του ταλαντωτή είναι ίση με $\frac{11\pi}{6} rad$ πόσο είναι το διάστημα από τη στιγμή 0 μέχρι τη θέση Γ

3. Ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση ,κάποια στιγμή t_1 =0 βρίσκεται στη θέση Γ όπου η αριθμητική τιμή της επιτάχυνσης είναι αρνητική και κατευθύνεται προς την πλησιέστερη ακραία θέση Δ στην οποία φθάνει μετά από χρόνο T/8 όπου T η περίοδος

α) να υπολογίσετε το πηλίκο $\frac{U}{K}$ για τη θέση Γ

β) να γράψετε τις εξισώσεις : χ-t, υ-t, και να σχεδιάσατε τις γραφικές παραστάσεις σε βαθμολογημένους άξονες

Ζήτημα 3^o

Ένα σώμα ,με μάζα m_1=2Kg είναι τοποθετημένο πάνω στο ένα άκρο ελατηρίου και ισορροπεί, το άλλο άκρο του ελατηρίου (K=100N/m) είναι στερεωμένο στο έδαφος.

Ένα άλλο σώμα , με μάζα m_2 =2Kg,κινούμενο κατακόρυφα προσκρούει στο σώμα που ισορροπούσε και δημιουργείται συσσωμάτωμα το οποίο όταν ολοκληρωθεί η σύγκρουση αποκτά κινητική ενέργεια 6 J

α. Να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος και την ταχύτητα με την οποία το σώμα με μάζα προσέκρουσε στο ακίνητο σώμα

β. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας για το συσσωμάτωμα , θεωρείστε t=0 τη στιγμή της σύγκρουσης και θετική φορά προς τα κάτω.

γ. να υπολογίσετε τη θερμότητα που αναπτύχτηκε κατά την σύγκρουση

δ. να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα μέχρι να μηδενιστεί για πρώτη φορά η ταχύτητα του συσσωματώματος. $g=10m/s^2$

Ζήτημα 4^o

Ένα μπουκάλι με πώμα από φελλό είναι τοποθετημένο πάνω στο άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο στο έδαφος.

Η μάζα του πώματος είναι 0,25 Kg και του μπουκαλιού 1 Kg. Το σύστημα ισορροπεί Κάποια στιγμή το πώμα εκτινάσσεται προς τα πάνω με ταχύτητα η οποία έχει μέτρο υ_1

Η εξίσωση για τη απομάκρυνση του μπουκαλιού από τη ΘΙ θεωρώντας t=0 τη στιγμή που εκτινάχθηκε το πώμα, είναι η:

$$\chi = 0,2\eta\mu(\omega t + \frac{7\pi}{6}) \text{ SI}$$

1 Να συμπληρώσετε την εξίσωση απομάκρυνσης για το μπουκάλι, από τη θέση ισορροπίας του
2 Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά το μπουκάλι αμέσως μετά την εκτίναξη του πώματος
3 Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του μπουκαλιού τη στιγμή t= 0
4. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητα του μπουκαλιού για πρώτη φορά μετά τη στιγμή 0

$g=10m/s^2$

Απαντήσεις

Ζήτημα 1^0

1. Σωστή η δ

$$\left.\begin{aligned} K_{\max} &= 0{,}04J \\ \Sigma F_{\max} &= 0{,}4N \\ K_{\max} &= \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}(DA)A = \frac{1}{2}\Sigma F_{\max} A \end{aligned}\right\} \quad A = 0{,}2m$$

$$\left.\begin{aligned} K &= 0{,}04\sigma\upsilon\nu^2(2t+\frac{\pi}{4}) \text{ SI} \\ K &= \frac{m\upsilon^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad \upsilon^2 = 0{,}16\sigma\upsilon\nu^2(2t+\frac{\pi}{4}) \left\{\begin{aligned} \upsilon &= 0{,}4\sigma\upsilon\nu(2t+\frac{\pi}{4}) \\ \upsilon^2 &= -0{,}4\sigma\upsilon\nu(2t+\frac{\pi}{4}) \end{aligned}\right.$$

Η δεύτερη λύση απορρίπτεται γιατι για t=0 μας δίνει αρνητική ταχύτητα ενώ από υπόθεση είναι θετική

Η φάση της επιτάχυνσης είναι κατά π/2 μεγαλύτερη από τη φάση της ταχύτητας εφ όσον εκφράζονται με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό ετσι

$$a = \omega^2 A\sigma\upsilon\nu(2t+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}) = 0{,}8\sigma\upsilon\nu(2t+\frac{3\pi}{4}) \text{ SI}$$

2

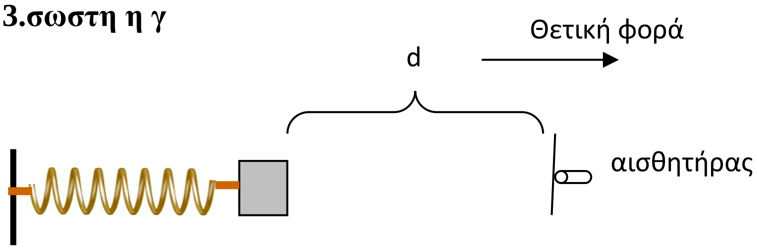
Προφανώς οι δυο θέσεις είναι συμμετρικές ως προς τη ΘΙ

Έτσι $\chi_\Gamma = -\chi_\Delta$

$$\left.\begin{aligned} \chi_\Gamma &= -\chi_\Delta \\ a_\Gamma &= -\omega^2 x_\Gamma \\ a_\Delta &= -\omega^2 x_\Delta \end{aligned}\right\} \quad a_\Gamma = -a_\Delta$$

Θυμάμαι : σε δύο θέσεις που είναι συμμετρικές ($\chi_1 = -\chi_2$) ως προς τη ΘΙ η δυναμική ενέργεια είναι ίδια ($U=1/2Dx^2$) επομένως και η κινητική ενέργεια

3.σωστη η γ



Από το διάγραμμα φαίνεται ότι μεγαλώνει η απόσταση του σώματος από τον αισθητήρα μετά τη στιγμή 0 ενώ τη στιγμή αυτή περνά από τη ΘΙ.

Με βάση την προσήμανση μετά τη στιγμή 0 βρίσκεται σε θέσεις με αρνητική απομάκρυνση επομένως η αρχική φάση είναι π rad

$$\upsilon = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \pi) = -\omega A \sigma\upsilon\nu\omega t$$

4.σωστη η β

5 σωστή η β

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι για t=0   U=1/4$E_{ολ}$ δηλ ,ακόμη από το διάγραμμα επειδή μετά τη στιγμή 0 η δυναμική ενέργεια μειώνεται το σώμα κινείται προς τη ΘΙ

προφανώς η αρχική φάση βρίσκεται στο 4^o τεταρτημόριο

$$\left.\begin{array}{l} U = \frac{1}{2}Dx2 \\ E = \frac{1}{2}DA^2 \\ U = \frac{1}{4}E \end{array}\right\} \qquad |x| = \frac{A}{2}$$

Επειδή η απομάκρυνση είναι αρνητική $x = -\frac{A}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{A}{2} \\ x = A\eta\mu(\omega t + \phi_o) \end{array}\right\} \quad \eta\mu(\phi_o) = -\frac{1}{2} = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \quad \left\{\begin{array}{l} \phi_o = 2\pi + (-\frac{\pi}{6}) \\ \phi_o = 2\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \end{array}\right.$$

$$x = A\eta\mu(\omega t + \frac{11\pi}{6})$$

Ζήτημα 2^o

1.

$$\frac{U}{K}=\frac{U}{E-U}=\frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2-\frac{1}{2}Dx^2}=\frac{x^2}{A^2-x^2}=\frac{\frac{A^2}{9}}{A^2-\frac{A^2}{9}}=\frac{1}{8}$$

2.

α.

$$\chi^2+\frac{\upsilon^2}{\omega^2}=A^2 \qquad \chi^2\omega^2+\upsilon^2=\omega^2A^2 \qquad \chi^2\omega^2+\upsilon^2=\upsilon_{\max}^2$$

β.

έστω ότι βρίσκεται σε θέση με θετική απομάκρυνση

$$\left.\begin{aligned} &U=3K\\ &U+K=E\end{aligned}\right\} \quad U=\frac{3}{4}E$$

$$\left.\begin{aligned} &U=\frac{3}{4}E\\ &U=\frac{1}{2}Dx^2\\ &E=\frac{1}{2}DA^2\end{aligned}\right\} \quad |x|=\frac{\sqrt{3}A}{2}$$

Με βαση την υπόθεση που κάναμε (χ θετικό) έχουμε

$$\left.\begin{aligned} &x=\frac{\sqrt{3}A}{2}\\ &x=A\eta\mu(\omega t+\phi)\end{aligned}\right\} \quad (\omega t_1+\phi)=\frac{\pi}{3} \qquad (1)$$

$$(\omega t_2+\phi)=\frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) $\Delta t=t_2-t_1=\frac{\pi}{6\omega}=\frac{T}{12}$

γ. $x=A\eta\mu\omega t=A\eta\mu\frac{11\pi}{6}=A\eta\mu(2\pi-\frac{\pi}{6})=-A/2$

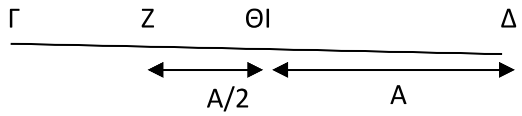
προφανώς τη στιγμή που η φάση είναι 11π/6 το σώμα κινείται προς τη θέση ισορροπίας γιατί:

$$\upsilon = \omega A \sigma \upsilon \nu \omega t = \omega A \sigma \upsilon \nu \frac{11\pi}{6} \succ 0$$

είναι $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

έτσι έχει κάνει τη διαδρομή ΘΙ έως το Δ από το Δ στο Γ και έφτασε στο Ζ

δηλ Α+Α+Α+Α/2=7Α/2=0,7m



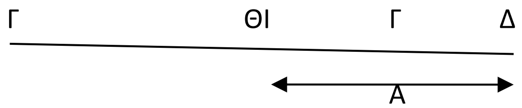
3.

α. από τη ΘΙ έως την ακραία θέση Δ, κάνει χρόνο Τ/4 και επειδή από τη Γ ως την ακραία θέση Δ κάνει Τ/8 προκύπτει ότι από τη ΘΙ έως τη θέση Γ κάνει χρόνο πάλι Τ/8.

Η μεταβολή της φάσης από τη ΘΙ έως τη θέση Γ είναι $\Delta\phi = \phi = \omega \Delta t = \omega \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$

Η απομάκρυνση για τη θέση Γ είναι

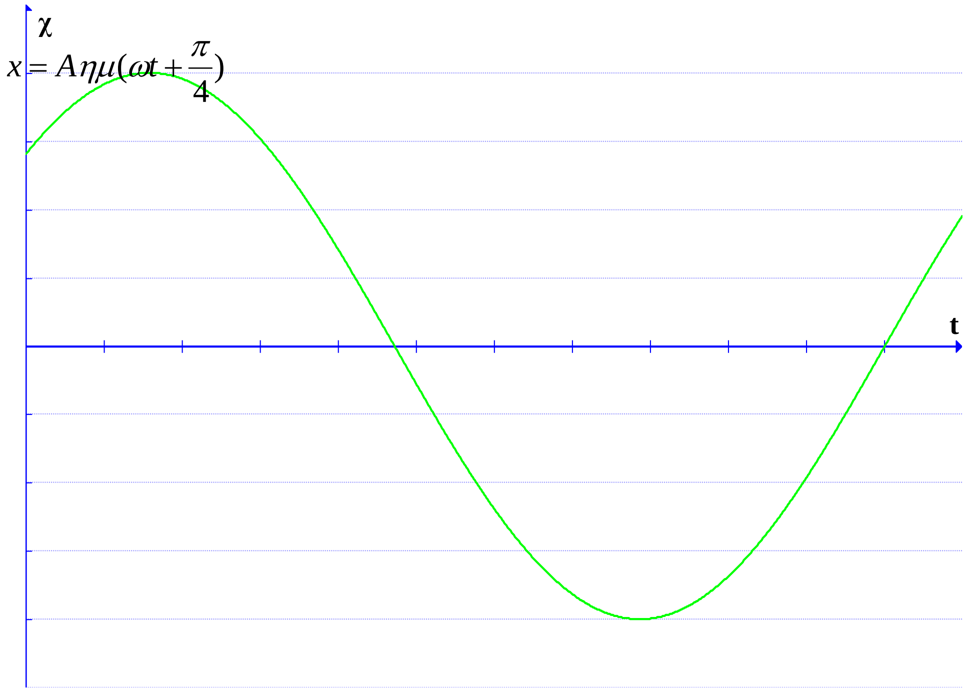
$$x = A\eta\mu\phi = A\eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{A\sqrt{2}}{2}$$



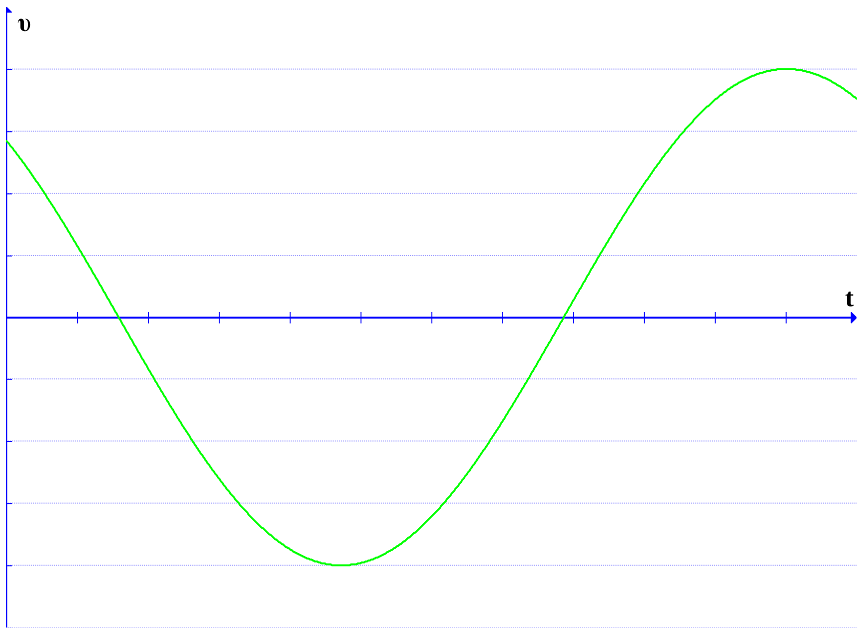
$$\frac{U}{K}=\frac{U}{E-U}=\frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2-\frac{1}{2}Dx^2}=\frac{x^2}{A^2-x^2}=\frac{\left(\frac{A\sqrt{2}}{2}\right)^2}{A^2-\left(\frac{A\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\frac{A^2}{2}}{A^2-\frac{A^2}{2}}=1$$

β.

$$\left.\begin{array}{l} x=A\eta\mu(\omega t+\phi) \\ x=\frac{A\sqrt{2}}{2} \\ t=0 \end{array}\right\} \quad \eta\mu(\phi)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{4} \quad \left\{\begin{array}{l} \phi=\pi/4(rad) \\ \phi=\pi+\frac{\pi}{4}\ \ rad \end{array}\right.$$



$$\upsilon=\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t+\frac{\pi}{4})$$



Ζήτημα 3ο

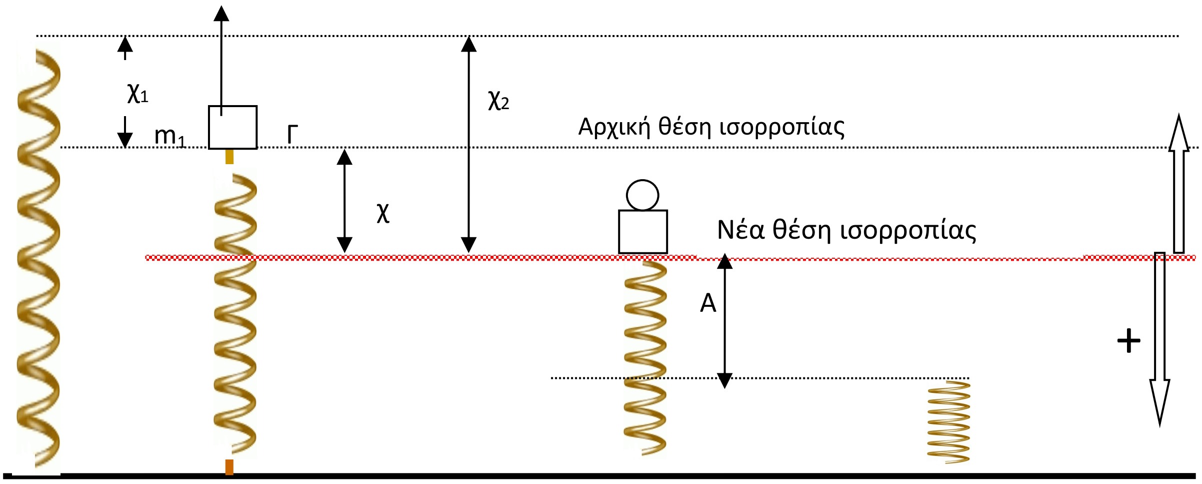
α.

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_k^2 = 6J$$

$$|\upsilon_k| = \sqrt{3}m/s \qquad \upsilon_k = \sqrt{3}m/s$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m_{o\lambda}}} = 5rad/\ s$$

$$\left.\begin{array}{ll} F_1^{\varepsilon\lambda} = K\chi_1 = m_1 g & x_1 = 0{,}2m \\ F_2^{\varepsilon\lambda} = K\chi 2_1 = m_1 g + m_2 g & x_2 = 0{,}4m \end{array}\right\} \quad x = x_2 = x_1 = 0{,}2m$$



Για τη θέση Γ ισχύει

$$\chi^2 + \frac{\upsilon_K^2}{\omega^2} = A^2 \qquad\qquad 0{,}2^2 + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{5^2} = A^2$$

$$A = 0{,}4m$$

β.

Με βαση τη προσήμανση το χ είναι αρνητικό!!!!!

$$\left.\begin{array}{l} x = A\eta\mu(\omega t + \phi) \\ x = -0{,}2m \\ t = 0 \end{array}\right\} \quad \eta\mu(\phi) = \frac{-1}{2} = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \quad \left\{\begin{array}{l} \phi = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}\ \text{rad} \\ \\ \phi = 2\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6})\ \ \text{rad} \end{array}\right.$$

$$x = 0{,}4\eta\mu(5t + \frac{11\pi}{6})\ \ \text{SI}$$

γ.

Η ορμή του συστήματος διατηρείται κατά τη κρούση $\vec{p}^{\sigma\upsilon\sigma}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}^{\sigma\upsilon\sigma}_{\mu\varepsilon\tau}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{p}^{\sigma\upsilon\sigma}_{\pi\rho\iota\nu} &= m_2\upsilon \\ \vec{p}^{\sigma\upsilon\sigma}_{\pi\rho\iota\nu} &= \left(m_2 + m_1\right)\upsilon_k \end{aligned}\right\}$$

$$\upsilon = 2\sqrt{3}m/s$$

$Q = \kappa\iota\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \ \varepsilon\nu\varepsilon\rho\gamma\varepsilon\iota\alpha\ \ \pi\rho\iota\nu\ \tau\eta\kappa\rho\acute{\alpha}\sigma\eta$ - κινητικη ενέργεια συσσωματώμ ατος

$$Q = \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_k^2$$

δ.

Με βαση τη προσήμανση και με βαση την αρχική φάση, στη κατώτερη θέση η φάση του ταλαντωτή είναι 2π+π/2

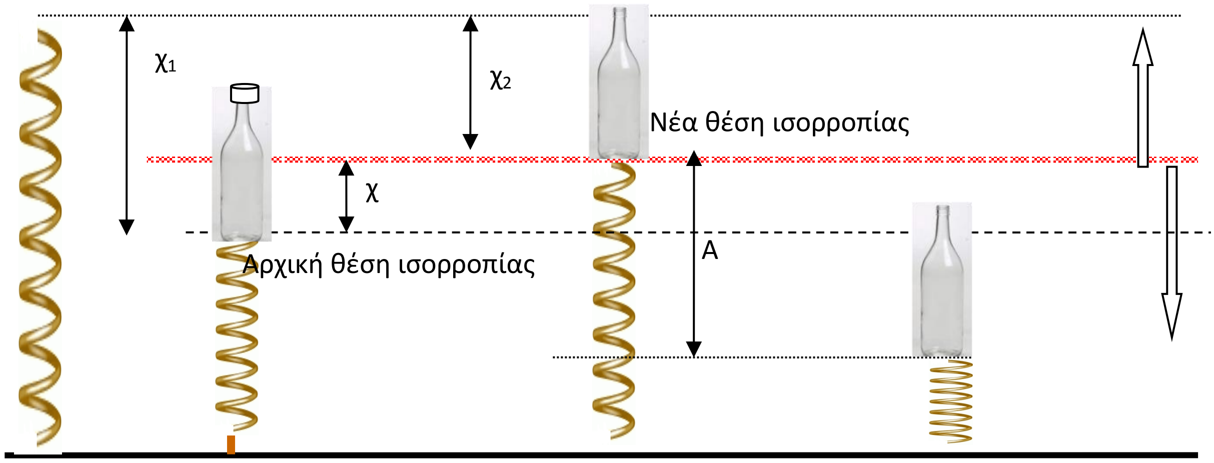
$$(\omega t + \frac{11\pi}{6}) = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$t = \frac{2\pi}{15}s$$

Ζήτημα 4ο

Για t=0 έχουμε

$$\chi = 0{,}2\eta\mu(\omega 0 + \frac{7\pi}{6}) = 0{,}2\eta\mu(\frac{7\pi}{6}) = 0{,}2\eta\mu(\pi + \frac{\pi}{6}) = 0{,}2(\eta\mu\pi\sigma\upsilon\nu\,(\frac{\pi}{6}) + \eta\mu\frac{\pi}{6}\sigma\upsilon\nu\pi) = 0{,}2\eta\mu\frac{\pi}{6}(-1) = -0{,}1m$$



Άρα προς τα κάτω προσημαίνεται με το πλην

Λόγω ισορροπίας έχω τα εξής:

$$\left.\begin{aligned} F_1^{\varepsilon\lambda} &= K\chi_1 = Mg + mg \\ F_2^{\varepsilon\lambda} &= K\chi_2 = Mg \\ x &= x_1 - x_2 \end{aligned}\right\} \qquad x = x_1 - x_2 = \frac{mg}{k}$$

$$K = \frac{mg}{x} = \frac{2{,}5}{0{,}1} = 25N/m$$

$$\chi^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2 \qquad \frac{\upsilon^2}{\omega^2} = A^2 - \chi^2 = 0{,}2^2 - 0{,}1^2 = \frac{3}{100} \qquad |\upsilon| = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m}{s}$$

Η ορμή του συστήματος φελλός -μπουκάλι διατηρείται $\vec{p}^{\,\sigma\upsilon\sigma}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}^{\,\sigma\upsilon\sigma}_{\mu\varepsilon\tau}$

αλλά $\vec{p}^{\,\sigma\upsilon\sigma}_{\pi\rho\iota\nu} = 0$ οποτε η ορμή του μπουκαλιού και του πώματος είναι αντίθετες **δηλ έχουν ίσα μέτρα**

mυ$_\pi$= Mυ με αντικατάσταση

$$\upsilon_\pi = \frac{1\frac{\sqrt{3}}{2}}{0{,}25} m/s = 2\sqrt{3} \quad \text{m/s}$$

$$\left(\frac{\Delta k}{\Delta t}\right) = \Sigma F.\upsilon = -Kx\upsilon = -25.(-0{,}1)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1{,}25\sqrt{3} \quad J/s$$

Τη στιγμή t$_1$ που μηδενίζεται, για πρώτη φορά, η ταχύτητα του μπουκαλιού η φάση ταλαντωτή είναι ιση με 3π/2 rad

$$5t_1 + \frac{7\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{15} s$$