ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Μηχανικές ταλαντώσεις – Κρούσεις

Θέμα 1ο

1. Σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με συχνότητα $f < f_0$. Η μείωση της συχνότητας ταλάντωσης έχει ως αποτέλεσμα:

α. την αύξηση του πλάτους της ταλάντωσης.

β. τη μείωση του πλάτους της ταλάντωσης.

γ. να μη μεταβληθεί το πλάτος της ταλάντωσης.

δ. την αύξηση ή τη μείωση του πλάτους της ταλάντωσης, ανάλογα με την τιμή της συχνότητας.

Μονάδες 5

2. Τη στιγμή που η κινητική ενέργεια ενός σώματος, το οποίο εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους Α, είναι ίση με το μισό της μέγιστης δυναμικής, η απόσταση του σώματος από τη θέση ισορροπίας είναι ίση με:

α. $\frac{A}{4}$ **β.** $\frac{A\sqrt{2}}{2}$ **γ.** $\frac{A\sqrt{3}}{2}$ **δ.** $\frac{A}{2}$

Μονάδες 5

3. Ένα σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με ακραίες θέσεις που απέχουν μεταξύ τους 50 cm. Το σώμα μεταβαίνει από τη μία ακραία στην άλλη σε 0,2 s. Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι ίση με:

α. $0{,}5\pi\,\frac{m}{s}$ **β.** $1{,}25\pi\,\frac{m}{s}$ **γ.** $2{,}5\pi\,\frac{m}{s}$ **δ.** $5\pi\,\frac{m}{s}$

Μονάδες 5

4. Σε μια φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_b = -bυ$:

α. καθώς μειώνεται το πλάτος, μειώνεται και η περίοδος ταλάντωσης.

β. ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών μειώνεται με την πάροδο του χρόνου.

γ. όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά απόσβεσης b, τόσο μεγαλύτερη ενέργεια θα χάσει τελικά ο ταλαντωτής.

δ. η ενέργεια ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Μονάδες 5

5. Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο ταλαντώσεις της ίδιας θέσης ισορροπίας, της ίδιας διεύθυνσης, του ίδιου πλάτους και συχνοτήτων που διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους. Η περίοδος της κίνησης του σώματος δίνεται από τη σχέση:

α. $T = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}$ **β.** $T = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$ **γ.** $T = \frac{T_1 + T_2}{2T_1T_2}$ **δ.** $T = \frac{1}{f_δ}$

Μονάδες 5

Θέμα 2ο

1. Σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, της ίδιας θέσης ισορροπίας με εξισώσεις:

$$x_1 = 0{,}2ημ(20t)\ m \quad και \quad x_2 = 0{,}2ημ\left(20t + \frac{π}{2}\right)\ m$$

Για τη σύνθετη ταλάντωση του σώματος σωστή είναι η εξίσωση:

α. $x = 0{,}2\sqrt{2}ημ\left(20t + \frac{π}{6}\right) m$ **β.** $α = -80ημ\left(20t + \frac{π}{4}\right)\frac{m}{s^2}$ **γ.** $υ = 4\sqrt{2}συν\left(20t + \frac{π}{4}\right)\frac{m}{s}$

Μονάδες 2

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 8

2. Μια σφαίρα συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με μια άλλη ακίνητη ίδιας μάζας και ακτίνας. Οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία:

α. $φ = 0°$ **β.** $φ = 90°$ **γ.** $φ = 45°$

Μονάδες 2

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 4

3. Ένα σώμα μάζας m εκτελεί αρμονική ταλάντωση πλάτους Α και κυκλικής συχνότητας ω. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά την αρνητική κατεύθυνση. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

α. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με το μηδέν.

β. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ η επιτάχυνση έχει αλγεβρική τιμή $α = +\frac{ω^2 A}{\sqrt{3}}$.

γ. Τη χρονική στιγμή $t = \frac{3T}{8}$ η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια φορά.

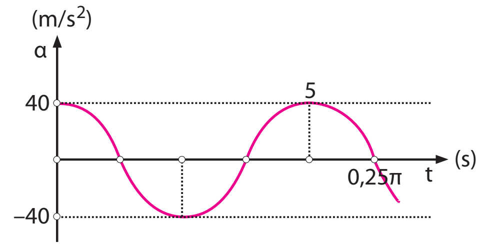
Μονάδες 3

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 6

Θέμα 3ο

Σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η μεταβολή της επιτάχυνσής του σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται στο διάγραμμα του σχήματος. Η ολική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίση με 8 J.



α. Να γράψετε τη χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης και της ταχύτητας για την ταλάντωση του σώματος.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε τη μετατόπιση και το συνολικό διάστημα κίνησης του σώματος μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = 0{,}25\pi$ s.

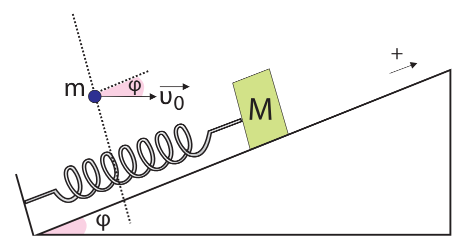
Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος τη χρονική στιγμή που έχει ταχύτητα μέτρου $2\,\frac{m}{s}$ για πρώτη φορά.

Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Στο λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσης $\varphi = 30°$, του διπλανού σχήματος, ισορροπεί ακίνητο ξύλινο σώμα μάζας $M = 9$ kg δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $k = 100\,\frac{N}{m}$, του οποίου το άλλο άκρο είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Ένα βλήμα μάζας $m = 1$ kg κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \sqrt{10}\,\frac{m}{s}$ και σφηνώνεται στο ξύλινο σώμα. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.



α. Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Μονάδες 10

γ. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του συσσωματώματος συναρτήσει του χρόνου.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του μέτρου της δύναμης του ελατηρίου κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

Μονάδες 5

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\,\frac{m}{s^2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

Θέμα 1ο

1. β (Σύμφωνα με την καμπύλη συντονισμού)

2. β (Ισχύουν: $K = \frac{1}{2}U_{max}$ και $K + U = E$. Άρα: $\frac{1}{2}U_{max} + U = U_{max}$ ή $U = \frac{1}{2}U_{max}$ ή $\frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}DA^2$ ή $x^2 = \frac{1}{2}A^2$ ή $x = \frac{A\sqrt{2}}{2}$)

3. β (Ισχύουν: $A = 0{,}25$ m και $T = 0{,}4$ s, οπότε $\upsilon = \omega A$ ή $\upsilon = 1{,}25\pi$ m/s)

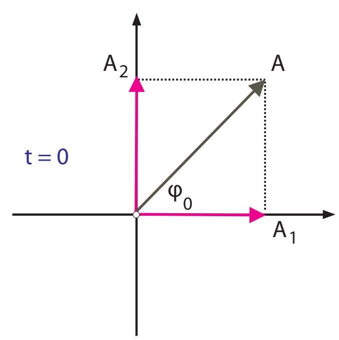
4. δ

5. α ($T = \frac{2\pi}{\overline{\omega}}$ ή $T = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}$ ή $T = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ ή $T = \frac{4\pi}{\frac{2\pi}{T_1} + \frac{2\pi}{T_2}}$ ή $T = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2}$)

Θέμα 2ο

1. γ

Για τη σύνθετη ταλάντωση ισχύει: $x = A\eta\mu(20t + \varphi_0)$, όπου:



$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ ή $A = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}2^2}$ ή $A = 0{,}2\sqrt{2}$ m

$\varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{A_2}{A_1}$ ή $\varepsilon\varphi\varphi_0 = \frac{0{,}2}{0{,}2}$ ή $\varepsilon\varphi\varphi_0 = 1$ ή $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

Άρα: $x = 0{,}2\sqrt{2}\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$m

$\upsilon_0 = \omega A$ ή $\upsilon_0 = 20 \cdot 0{,}2\sqrt{2}$ ή $\upsilon_0 = 4\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$ και

$\upsilon = 4\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{m}{s}$

2. β

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ διανυσματικά και έχουμε:

$$\vec{p}_{\text{ολ. πριν}} = \vec{p}_{\text{ολ. μετά}} \text{ ή } \vec{p}_{1\,\text{πριν}} = \vec{p}_{1\,\text{μετά}} + \vec{p}_{2\,\text{μετά}}$$

Επομένως ισχύει:

$$(m\upsilon)^2 = (m\upsilon_1)^2 + (m\upsilon_2)^2 + 2m\upsilon_1 m\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } \upsilon^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΚΕ για την ελαστική κρούση και έχουμε:

$$K_{\text{ολ. πριν}} = K_{\text{ολ. μετά}} \text{ ή } \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \text{ ή } \upsilon^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$\upsilon^2 = \upsilon^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } 0 = 2\upsilon_1\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \text{ ή } \varphi = 90°$$

3. **α.** Λ

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \;\; \acute{\eta} \;\; 0 = A\eta\mu\varphi_0 \;\; \acute{\eta} \;\; \eta\mu\varphi_0 = 0 \;\; \acute{\eta} \;\; (\varphi_0 = 0 \;\; \acute{\eta} \;\; \varphi_0 = \pi)$$

Τη στιγμή $t = 0$ έχουμε $\upsilon < 0$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\varphi_0 < 0$, άρα δεκτή η $\varphi_0 = \pi$.

β. Λ

$$x = A\eta\mu(\omega t + \pi) \text{ και } \alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \pi)$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{8}$ και προκύπτει:

$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{8} + \pi\right) \;\; \acute{\eta} \;\; \alpha = -\omega^2 A\eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) \;\; \acute{\eta} \;\; \alpha = -\omega^2 A\eta\mu\frac{5\pi}{4} \;\; \acute{\eta} \;\; \alpha = +\frac{\omega^2 A\sqrt{2}}{2}$$

γ. Σ

$$\varphi = (\omega t + \pi) \;\; \acute{\eta} \;\; \varphi = \left(\frac{2\pi}{T}\frac{3T}{8} + \pi\right) \;\; \acute{\eta} \;\; \varphi = \left(\frac{3\pi}{4} + \pi\right) \;\; \acute{\eta} \;\; \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

$\sigma\upsilon\nu\varphi > 0$ και $\eta\mu\varphi < 0$, οπότε $\upsilon > 0$ και $\alpha > 0$.

Θέμα 3ο

Ισχύουν:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0),\; \upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \text{ και } \alpha = -\alpha_{max}\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Σύμφωνα με τη γραφική παράσταση έχουμε:

$$\alpha_{max} = 40\,\frac{m}{s^2}, \text{ άρα } \omega^2 A = 40 \; (1)$$

$$\frac{5T}{4} = 0{,}25\pi \;\; \acute{\eta} \;\; T = 0{,}2\pi \text{ s, άρα } \omega = \frac{2\pi}{0{,}2\pi} \;\; \acute{\eta} \;\; \omega = 10\,\frac{rad}{s}$$

$$\text{Η (1) δίνει } 100A = 40 \;\; \acute{\eta} \;\; A = 0{,}4 \text{ m}$$

$$\upsilon_{max} = \omega A \;\; \acute{\eta} \;\; \upsilon_{max} = 4\,\frac{m}{s}$$

$$E_{o\lambda.} = 8 \text{ J} \;\; \acute{\eta} \;\; \frac{1}{2}DA^2 = 8 \;\; \acute{\eta} \;\; D0{,}4^2 = 16 \;\; \acute{\eta} \;\; 16\cdot 10^{-2}D = 16 \;\; \acute{\eta} \;\; D = 100\,\frac{N}{m}$$

$$\text{Για } t = 0,\; \alpha = \alpha_{max} \text{ και προκύπτει: } \alpha_{max} = -\alpha_{max}\eta\mu\varphi_0 \;\; \acute{\eta} \;\; \eta\mu\varphi_0 = -1 \;\; \acute{\eta} \;\; \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$$

α. Οι ζητούμενες εξισώσεις είναι:

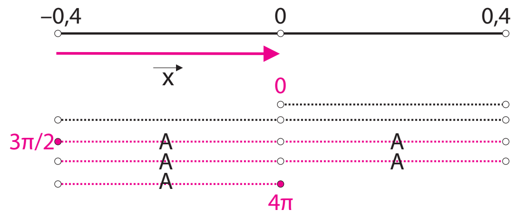
$$x = 0{,}4\eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ και } \upsilon = 4\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ SI}$$

β. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχουμε: $x_0 = -0{,}4m$ και $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0{,}25\pi$ s έχουμε: $\varphi_1 = 10\cdot 0{,}25\pi + \frac{3\pi}{2}$ ή $\varphi_1 = 4\pi$ και $x_1 = 0$ m.

Η μετατόπιση δίνεται στο παρακάτω σχήμα και είναι ίση με:

$$x = x_1 - x_0 \;\; \acute{\eta} \;\; x = 0 - (-0{,}4) \;\; \acute{\eta} \;\; x = 0{,}4 \text{ m}$$



Σύμφωνα με το σχήμα το συνολικό διάστημα κίνησης είναι ίσο με:

$$s_{ολ.} = 5A = 5 \cdot 0{,}4 = 2\ \text{m}$$

γ. Ισχύει: $\dfrac{dp}{dt} = ΣF = F_{επ.} = -Dx = -100x$

$$υ = 4συν\left(10t + \frac{3π}{2}\right) \text{ ή } \pm 2 = συν\left(10t + \frac{3π}{2}\right) \text{ ή } συν\left(10t + \frac{3π}{2}\right) = \pm\frac{1}{2} \text{ ή } 10t + \frac{3π}{2} = κπ \pm \frac{π}{3}$$

Για $κ = 0$ και $κ = 1$ προκύπτει $t < 0$ και απορρίπτονται.

Για $κ = 2$ έχουμε: $10t + \dfrac{3π}{2} = 2π - \dfrac{π}{3}$ (1η φορά).

Οπότε: $x = 0{,}4ημ\left(10t + \dfrac{3π}{2}\right)$ ή $x = 0{,}4ημ\left(2π - \dfrac{π}{3}\right)$ ή $x = 0{,}4ημ\dfrac{5π}{3}$ ή $x = -0{,}2\sqrt{3}\ \text{m}$

Άρα: $\dfrac{dp}{dt} = -100(-0{,}2\sqrt{3})$ ή $\dfrac{dp}{dt} = 20\sqrt{3}\ \text{kg}\cdot\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Θέμα 4ο

Εφαρμόζουμε δύο φορές τη συνθήκη ισορροπίας:

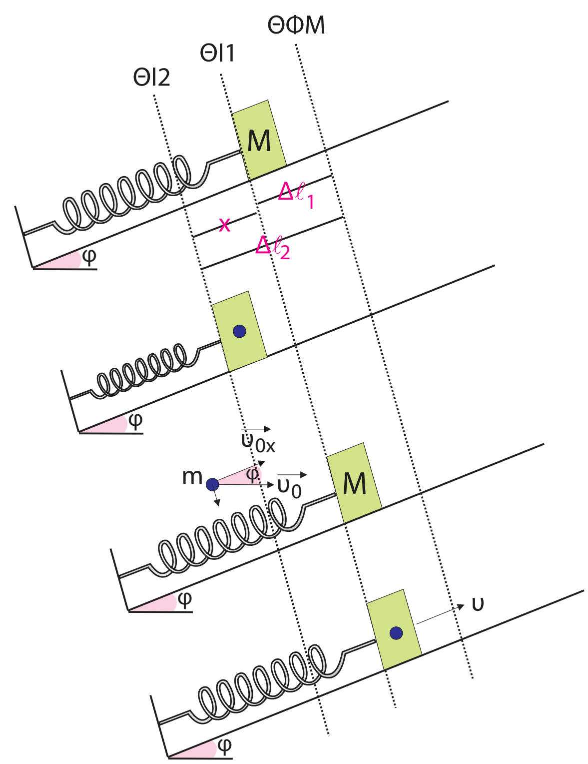
ΘΙ1: $Mgημ30 = kΔ\ell_1$ ή $45 = 100Δ\ell_1$ ή

$Δ\ell_1 = 0{,}45\ \text{m}$

ΘΙ2: $(M + m)gημ30 = kΔ\ell_2$ ή $50 = 100Δ\ell_2$

ή $Δ\ell_2 = 0{,}5\ \text{m}$

$x = Δ\ell_2 - Δ\ell_1$ ή $x = 0{,}05\ \text{m}$



Κρούση

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στη διεύθυνση της ταλάντωσης:

$$mυ_0συν30 = (M + m)υ \text{ ή}$$

$$1 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \cdot υ \text{ ή } υ = \frac{\sqrt{30}}{20}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

α. $υ = \dfrac{\sqrt{30}}{20}\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

ΑΑΤ του συσσωματώματος

Στη θέση κρούσης ($x = +0{,}05$ m και $\upsilon = +\frac{\sqrt{30}}{20}\frac{m}{s}$) εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση:

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA^2 \text{ ή } 100(0{,}05)^2 + 10\cdot\left(\frac{\sqrt{30}}{20}\right)^2 = 100A_2 \text{ ή } A = 0{,}1 \text{ m}$$

β. $A = 0{,}1$ m

$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

$$A = 0{,}1 \text{ m}, \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \text{ ή } \omega = \sqrt{10}\,\frac{rad}{s}$$

$$t = 0: +0{,}05 = 0{,}1\eta\mu\varphi_0 \text{ ή } \eta\mu\varphi_0 = \frac{1}{2} \text{ και } \upsilon > 0, \text{ άρα } \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

γ. $x = 0{,}1\eta\mu\left(\sqrt{10}t + \frac{\pi}{6}\right)$ m

δ. $|F_{\varepsilon\lambda.}| = kx$, και $x_{max} = \Delta\ell_2 + A$ ή $x_{max} = 0{,}5 + 0{,}1$ ή $x_{max} = 0{,}6$ m.

$$|F_{\varepsilon\lambda.}|_{max} = 60 \text{ N}$$