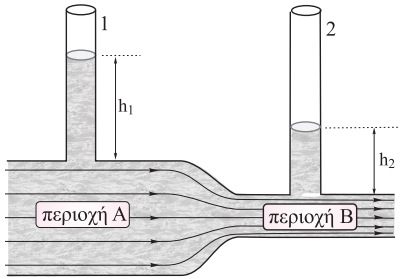
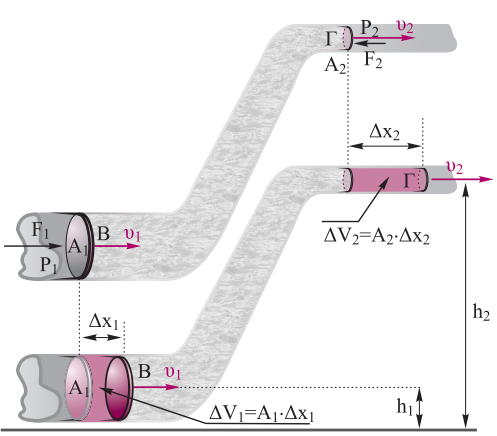


23. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ BERNΟΥΛΛΙ

Φαινόμενα	Το αεροπλάνο πετά παρότι είναι πολύ βαρύτερο από τον αέρα. Οι πιλότοι για να απογειώσουν το αεροπλάνο επιδιώκουν να έχουν αντίθετα τον άνεμο. Όταν φυσά δυνατά, μερικές στέγες αναρπάζονται από τον αέρα. Οι βρύσες στους ψηλότερους ορόφους μιας πολυκατοικίας έχουν μικρότερη ροή νερού από τις βρύσες των χαμηλότερων ορόφων. Τα παραπάνω είναι μερικά από τα φαινόμενα που μπορούν να ερμηνευτούν με τη μελέτη των ρευστών σε κίνηση.	
Φυσικά μεγέθη	Για να περιγράψουμε ενεργειακά τα ρευστά έχουμε εισάγει τα φυσικά μεγέθη: δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού, κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού, μηχανική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού και έργο δύναμης ανά μονάδα όγκου του ρευστού.	
	23Ε1 Δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού $\frac{U}{\Delta V} = \rho gh$	Μια στοιχειώδης μάζα Δm ενός ρευστού έχει δυναμική ενέργεια ίση με $U = \Delta m gh$. Διαιρώντας με τον όγκο ΔV που καταλαμβάνει η μάζα Δm και παίρνοντας υπόψη ότι $\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$ προκύπτει: $\frac{U}{\Delta V} = \rho gh \quad (23.1)$
	23Ε2 Κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού $\frac{K}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho v^2$	Μια στοιχειώδης μάζα Δm ενός ρευστού έχει κινητική ενέργεια ίση με $K = \frac{1}{2} \Delta m v^2$. Διαιρώντας με τον όγκο ΔV που καταλαμβάνει η μάζα Δm και παίρνοντας υπόψη ότι $\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$ προκύπτει: $\frac{K}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (23.2)$ <i>Προτεινόμενα θέματα: / / / 14.ε9</i>

Φυσικά μεγέθη	23E3 Μηχανική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού $\frac{E_{\mu\eta\chi}}{\Delta V} = \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2$	Μια στοιχειώδης μάζα Δm ενός ρευστού έχει μηχανική ενέργεια ίση με $E_{\mu\eta\chi} = U + K \quad \text{ή} \quad E_{\mu\eta\chi} = \Delta m gh + \frac{1}{2}\Delta m v^2$ Διαιρώντας με τον όγκο ΔV που καταλαμβάνει η μάζα Δm και παίρνοντας υπόψη ότι $\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$ προκύπτει: $\frac{E_{\mu\eta\chi}}{\Delta V} = \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (23.3)$ <i>Προτεινόμενα θέματα: Π.1/ 23.27</i>
Φυσικά μεγέθη	23E4 Έργο δύναμης ανά μονάδα όγκου του ρευστού $\frac{W}{\Delta V} = p_1 - p_2$	Για τη ροή ενός ρευστού απαιτείται διαφορά πίεσης. Η διαφορά αυτή πίεσης δημιουργεί δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό που μελετάμε από το περιβάλλον του (που επίσης είναι ρευστό). Αν η στοιχειώδης μάζα ρευστού που μελετάμε έχει όγκο ΔV, τότε οι δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω της διαφοράς πίεσης του δίνουν ενέργεια μέσω έργου* που είναι ίση: $\frac{W}{\Delta V} = \frac{F_1 \Delta x - F_2 \Delta x}{\Delta V} = \frac{(p_1 - p_2) A \cdot \Delta x}{\Delta V} = p_1 - p_2 \quad (23.4)$ *Βλέπε και απόδειξη του νόμου του Bernoulli.
Πείραμα	23ΠΕΙΡ1 Διαφορά πίεσης κατά μήκος σωλήνα με στένωση	Στο σχήμα δείχνεται ένας οριζόντιος σωλήνας μεταβλητής διατομής στον οποίο ρέει ρευστό. Παρατηρούμε ότι το ύψος της στήλης του υγρού στον κατακόρυφο σωλήνα 1 είναι μεγαλύτερο από το ύψος της στήλης του υγρού στον κατακόρυφο σωλήνα 2. Το φαινόμενο αυτό αποτελεί απόδειξη* ότι η πίεση στην περιοχή Α είναι μεγαλύτερη από την πίεση στην περιοχή Β.  *Προκύπτει από το συνδυασμό των 21Ε1 και 21Ν1.

Απόδειξη	Ερμηνεία Πειραματικών Δεδομένων Σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας η ταχύτητα ροής στη διατομή 2 είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα ροής στη διατομή 1, δηλαδή μια στοιχειώδης μάζα καθώς μετακινείται από τη διατομή 1 προς την 2 επιταχύνεται. Το συμπέρασμα αυτό μας οδηγεί σε δύο συλλογισμούς. Πρώτον, σύμφωνα με το Θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για να συμβαίνει επιτάχυνση των μαζών του ρευστού που βρίσκονται μεταξύ των διατομών 1 και 2 πρέπει να δέχεται από το περιβάλλον ρευστό συνολική δύναμη προς τα δεξιά, αυτό θα συμβεί μόνο αν η πίεση στο 1 είναι μεγαλύτερη από την πίεση στο 2, καθώς τα ρευστά ρέουν από μεγαλύτερες προς μικρότερες πιέσεις. Άρα, η πίεση* ενός ρευστού σε μια θέση σχετίζεται με την ταχύτητά του στη θέση αυτή. Δεύτερο, σύμφωνα με το Θεώρημα Έργου Ενέργειας, αφού η κινητική (άρα και η μηχανική) ενέργεια των μαζών του ρευστού αυξάνεται πρέπει κάποια μη συντηρητική δύναμη να προσφέρει ενέργεια μέσω έργου στο ρευστό. Η δύναμη αυτή προέρχεται από τη διαφορά πίεσης και την ασκεί το περιβάλλον ρευστό, στο ρευστό που βρίσκεται μεταξύ των διατομών 1 και 2. * Να θυμηθούμε από τη μελέτη των ρευστών σε ισορροπία ότι η πίεση ενός ρευστού εξαρτάται και από το ύψος h. <i>Προτεινόμενα θέματα: / 23.18 /</i>
Νόμοι	23N1 Εξίσωση του Bernoulli $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{σταθ.}$ Η εξίσωση του Bernoulli είναι μια σχέση που συνδέει την πίεση, την ταχύτητα ροής και το ύψος σε ένα σωλήνα ή μια φλέβα στην οποία ρέει ιδανικό ρευστό. Σύμφωνα με αυτή: Το άθροισμα της πίεσης, (p), της κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου, $\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)$ και της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου του ρευστού, (ρgh), έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο μιας ρευματικής φλέβας. $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{σταθ.} \quad (23.5)$ Η πίεση (p) είναι η πίεση που μετρά ένα μανόμετρο, αν τοποθετηθεί με τέτοιο τρόπο στη φλέβα, ώστε να μην επηρεάζει την ροή της. Να τονίσουμε ότι η εξίσωση Bernoulli ισχύει μόνο για ιδανικά ρευστά και μόνο για σημεία που ανήκουν στην ίδια ρευματική φλέβα.

Νόμοι	23Ε3 Μηχανική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του ρευστού $\frac{E_{\mu\eta\chi}}{\Delta V} = \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2$	Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι η Εξίσωση του Bernoulli είναι συνέπεια της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας στα ρευστά. Προτεινόμενα θέματα: 23.Π1, 23.6, 23.10, 23.11, 23.12 / 23.15, 23.16, 23.17, 23.19, 23.20, 23.24, 23.25, 23.26 / 23.40, 23.41, 23.42, 23.43, 23.ε1, 23.ε2, 23.ε3, 23.ε4, 23.ε5 / 23.75, 23.77, 23.78, 23.79, 23.80, 23.81, 23.ε8
	ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΟΥ BERNOLLI Θεωρούμε ένα ιδανικό (ασυμπίεστο) ρευστό το οποίο ρέει σε πλάγιο σωλήνα μεταβλητής διατομής. Διαλέγουμε δύο σημεία Β και Γ που είναι σημεία της ίδιας ρευματικής γραμμής τα οποία βρίσκονται σε ύψη h_1 και h_2 από το έδαφος αντίστοιχα. Η πίεση στο Β είναι p_1 και στο σημείο αυτό η διατομή του σωλήνα είναι A_1 ενώ στο Γ, p_2 και A_2 ($A_2 < A_1$) αντίστοιχα. Θεωρούμε σαν σύστημα το ρευστό μεταξύ των Β και Γ και ότι αυτό ρέει από το Β προς το Γ. Επειδή η διατομή του σωλήνα από το Β προς το Γ μειώνεται, σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας η ταχύτητα του ρευστού αυξάνεται, άρα το ρευστό επιταχύνεται με τη βοήθεια μιας δύναμης που ασκείται σε αυτό από το περιβάλλον του. Σε χρονικό διάστημα Δt ένα στοιχειώδες τμήμα μάζας Δm του ρευστού μετατοπίζεται από το Β προς το Γ. Εφαρμόζουμε για το Δm το θεώρημα έργου ενέργειας (ΘΕΕ). $K_{\Gamma} - K_B = W_{F_{\xi}(B \rightarrow \Gamma)} + W_{w(B \rightarrow \Gamma)} \tag{23.6}$ όπου $W_{F_{\xi}}$ είναι το έργο που προσφέρεται στο ρευστό από το περιβάλλον του, το οποίο περιβάλλον του ασκεί δύναμη κατά τη μετακίνησή του από το Β στο Γ. Η δύναμη αυτή προέρχεται από τη διαφορά πίεσης που προκαλεί το περιβάλλον ρευστό στο ρευστό που βρίσκεται μεταξύ των διατομών A_1 και A_2. Το έργο αυτό είναι το έργο της δύναμης F_1 ($F_1 \Delta x_1$) που είναι θετικό και της δύναμης F_2 ($F_2 \Delta x_2$) που είναι αρνητικό, δηλαδή 	

$$W_{F_{\xi}(B \rightarrow \Gamma)} = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 \quad \text{ή}$$

$$W_{F_{\xi}(B \rightarrow \Gamma)} = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$$

Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$ και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$W_{F_{\xi}(B \rightarrow \Gamma)} = (p_1 - p_2) \Delta V$$

Το έργο του βάρους είναι $W_{w(B \rightarrow \Gamma)} = U_B - U_{\Gamma} = -\Delta m g (h_2 - h_1)$ και είναι αρνητικό αφού η στοιχειώδης μάζα Δm κατά τη μετακίνησή της από το Β στο Γ ανεβαίνει. Αντικαθιστώντας στην (23.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta m v_{\Gamma}^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_B^2 &= (p_1 - p_2) \Delta V - \Delta m g (h_2 - h_1) \quad \text{ή} \\ \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_{\Gamma}^2 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta V} v_B^2 &= (p_1 - p_2) - \frac{\rho \Delta V}{\Delta V} g (h_2 - h_1) \quad \text{ή} \\ \frac{1}{2} \rho v_{\Gamma}^2 + p_2 + \rho g h_2 &= \frac{1}{2} \rho v_B^2 + p_1 + \rho g h_1 \end{aligned} \quad (23.7)$$

Επομένως για οποιοδήποτε σημείο ενός ιδανικού ρευστού ισχύει

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g h = \text{σταθ.}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την εξίσωση του Bernoulli.

Η παραπάνω εξίσωση όπως αποδείξαμε αποτελεί μια έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας στα ρευστά και ισχύει κάτω από τις εξής προϋποθέσεις:

- Το ρευστό είναι ασυμπίεστο,
- Οι τριβές μεταξύ του ρευστού και των τοιχωμάτων του σωλήνα είναι αμελητέες,
- Η ροή είναι στρωτή.

Προτεινόμενα θέματα: 23.Π1, 23.6, 23.10, 23.11, 23.12 / 23.15, 23.16, 23.17, 23.19, 23.20, 23.24, 23.25, 23.26 / 23.40, 23.41, 23.42, 23.43, 23.ε1, 23.ε2, 23.ε3, 23.ε4, 23.ε5 / 23.65, 23.66, 23.75, 23.77, 23.78, 23.79, 23.80, 23.81, 23.ε8

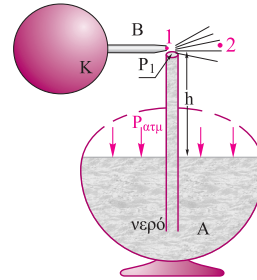
Νόμοι	23N2 Νόμος του Bernoulli σε Ενεργειακή Διατύπωση $\Delta K + \Delta U = W_{Fe\xi}$	Αναδιατυπώνοντας τη σχέση (23.6) φθάνουμε στην εξής μορφή: $(K_{\Gamma} - K_B) - W_{w(B \rightarrow \Gamma)} = W_{Fe\xi(B \rightarrow \Gamma)} \quad \text{ή}$ $(K_{\Gamma} - K_B) - (U_B - U_{\Gamma}) = W_{Fe\xi(B \rightarrow \Gamma)} \quad \text{ή}$ $\Delta K + \Delta U = W_{Fe\xi} \quad (23.8)$ Άρα η εξίσωση ή νόμος του Bernoulli μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Το έργο των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα ρευστό ισούται με το άθροισμα της μεταβολής της κινητικής και δυναμικής ενέργειας του ρευστού. Προτεινόμενα θέματα: / 14.35, 14.36 / 14.42, 14.61, 14.67/
Νόμοι	23N3 Εξίσωση του Bernoulli σε οριζόντια φλέβα. $\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{σταθ.}$	Σε μια οριζόντια φλέβα το ύψος h του υγρού παραμένει σταθερό, οπότε η σχέση (23.6) γίνεται: $\frac{1}{2}\rho v_{\Gamma}^2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_1 \quad (23.9)$ Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στα εξής δύο συμπεράσματα. A. Όταν μια οριζόντια φλέβα στενεύει τότε: επειδή λόγω της εξίσωσης της συνέχειας η ταχύτητα ροής αυξάνεται, η πίεση λόγω της εξίσωσης του Bernoulli ελαττώνεται. B. Σε μια οριζόντια φλέβα το έργο λόγω διαφοράς πίεσης, μετατρέπεται σε μεταβολή της κινητικής ενέργειας. Αυτό προκύπτει αν αναδιατάξουμε τη σχέση (23.7) και πολλαπλασιάσουμε με ΔV. $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad \text{ή}$ $(p_1 - p_2)\Delta V = \frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2 \quad \text{ή}$ $W = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 \quad \text{ή} \quad W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}$ <i>Προτεινόμενα θέματα: 23.2, 23.3, 23.4, 23.6, 23.7, 23.8, / 23.14, 23.21, / 23.28, 14.30, 23.31, 23.32, 23.33, 23.45, 23.47, 23.48, 23.49, 23.50, 23.51, 23.52, 23.53, 23.55, 23.58, 23.60, 23.61, 23.62, 23.ε6 / 23.67, 23.68, 23.69, 23.70, 23.72, 23.73, 23.74, 23.75, 23.83, 23.84, 23.85, 23.ε7, 23.ε10</i>

Νόμοι	23N4 Νόμος του Bernoulli στα αέρια.	Για την απόδειξη της Εξίσωσης του Bernoulli δεχτήκαμε ότι το ρευστό είναι μη συμπιεστό. Στα αέρια που είναι συμπιεστικά θα έπρεπε ο νόμος να μην ισχύει. Όμως βρίσκεται ότι για ταχύτητες μικρότερες των 150m/s ισχύει με πολύ καλή προσέγγιση, ενώ για ταχύτητες που πλησιάζουν την ταχύτητα του ήχου (340m/s) υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις. Στα αέρια πολύ συχνά έχουμε ένα εμπόδιο να κινείται μέσα στον ακίνητο αέρα. Μια τέτοια περίπτωση είναι το αεροπλάνο που πετά. Τα φαινόμενα ροής γύρω από ένα σώμα είναι ίδια είτε το σώμα κινείται και το ρευστό ηρεμεί, είτε το σώμα ηρεμεί και το ρευστό κινείται με αντίθετη ταχύτητα. Έτσι, όταν έχουμε εμπόδιο που κινείται μέσα σε ακίνητο ρευστό (π.χ. αεροπλάνο), η ταχύτητα που υπεισέρχεται στην εξίσωση του Bernoulli, είναι η σχετική ταχύτητα του ρευστού ως προς το εμπόδιο. Δηλαδή, την εξίσωση του Bernoulli την γράφει ο παρατηρητής που βρίσκεται πάνω στο εμπόδιο. <i>Προτεινόμενα θέματα: 23.9, 23.13 / / 23.44, 23.46, 23.56, 23.57, 23.63, 23.64.</i>
Μεθοδολογία	23Σ1 Μεθοδολογία εφαρμογής της εξίσωσης (νόμου) του Bernoulli.	Κατά την εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα εξής: A. Σε ένα ακίνητο ρευστό οι προϋποθέσεις εφαρμογής του νόμου του Bernoulli ισχύουν, άρα ο νόμος εφαρμόζεται και σε ακίνητα ρευστά. B. Σε μια οριζόντια φλέβα ανεξάρτητα από στενώσεις θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια του ρευστού δεν μεταβάλλεται, οπότε ο όρος παραμένει σταθερός. Γ. Στον όρο ρgh, το h εκφράζει το ύψος της στοιχειώδους μάζας από το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, ενώ στον τύπο της υδροστατικής πίεσης, $p = \rho gh$, το h δηλώνει βάθος από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού. Δ. Ένα ρευστό που ρέει σε σωλήνα, μόλις εξέλθει στην ατμόσφαιρα θεωρούμε ότι έχει πίεση ίση με την ατμοσφαιρική, $p_{ατμ}$. E. Ο νόμος του Bernoulli εφαρμόζεται και στα αέρια.

Εφαρμογές του νόμου του Bernoulli .

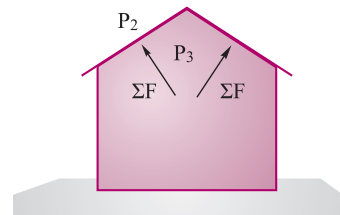
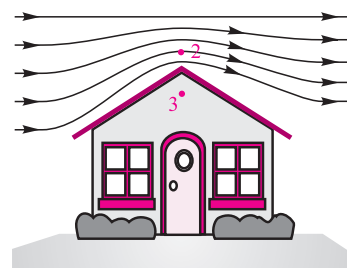
- Ψεκαστήρας.

Με τη βοήθεια της ελαστικής κάψας διοχετεύουμε αέρα στον οριζόντιο σωλήνα ο οποίος εξέρχεται από το άκρο του 1. Σύμφωνα με την εξίσωση του **Bernoulli**, στο σημείο 1 της ρευματικής φλέβας που το ρευστό (αέρας) έχει μεγάλη ταχύτητα, η πίεση είναι μικρότερη από το σημείο 2, που είναι ίση με την $p_{ατμ}$ όση και στην επιφάνεια του υγρού. Έτσι, το υγρό του δοχείου ανέρχεται τον κατακόρυφο σωλήνα και παρασυρόμενο από το οριζόντιο ρεύμα του αέρα εκτοξεύεται υπό μορφή σταγονιδίων.



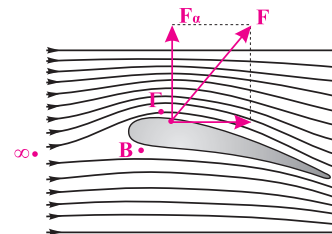
- Αναρπαγή στέγης

Όταν φυσάει άνεμος οριζόντια με μεγάλη ταχύτητα υπάρχει κίνδυνος αρπαγής μιας στέγης. Καθώς ο άνεμος περνά από το υψηλότερο σημείο της στέγης (σημείο 2 στο σχήμα), υπάρχει στένωση των ρευματικών γραμμών, δηλαδή αύξηση ταχύτητας και σύμφωνα με την εξίσωση του **Bernoulli** ελάττωση της πίεσης, $p_2 < p_\infty$. Στο εσωτερικό του σπιτιού (σημείο 3) η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική, δηλαδή ακόμα μεγαλύτερη από την p_∞ . Έτσι, λόγω της διαφοράς πίεσης μεταξύ του εσωτερικού και εξωτερικού της στέγης αναπτύσσονται δυνάμεις κάθετες στην επιφάνεια της, με φορά προς τα πάνω, που ξεπερνώντας κάποιο όριο μπορούν να την ξεκολλήσουν.



- Δυναμική άνωση και ανύψωση του αεροπλάνου.

Η κίνηση ενός αεροπλάνου είναι η περίπτωση ενός εμποδίου που τρέχει μέσα σε ακίνητο ρευστό. Τα φτερά του αεροπλάνου έχουν τέτοια τομή ώστε όπως αυτό κινείται, να υπάρχει πύκνωση των ρευματικών γραμμών του αέρα στο πάνω μέρος και αραίωση στο κάτω. Η διαφοροποίηση αυτή δημιουργεί διαφοράς πίεσης μεταξύ του κάτω και πάνω μέρους του αεροπλάνου.

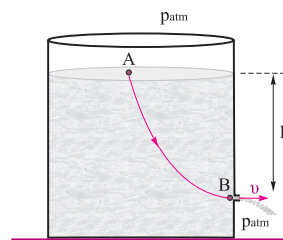


Εφαρμογές

Η διαφορά πίεσης προκαλεί την άσκηση δύναμης F , (αεροδύναμη), κάθετης στην επιφάνεια των φτερών. Όταν η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης, F_a (δυναμική άνωση) είναι μεγαλύτερη από το βάρος του αεροπλάνου, αυτό ανέρχεται.

- Θεώρημα Torricelli.

Ένα ανοικτό δοχείο περιέχει υγρό. Σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού υπάρχει μικρή τρύπα από την οποία το υγρό βγαίνει με ταχύτητα v . Με εφαρμογή της εξίσωσης του **Bernoulli** μεταξύ του σημείου A της ελεύθερης επιφάνειας και του σημείου B, που ανήκουν στην ίδια ρευματική φλέβα, υπολογίζεται η ταχύτητα εκροής v από το σημείο B. Βρίσκεται ότι είναι ίση με αυτήν που θα είχε αν αφηνόταν να πέσει ελεύθερα από το ίδιο ύψος, δηλαδή $v = \sqrt{2gh}$. Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως **θεώρημα Torricelli**.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Στον οριζόντιο σωλήνα του σχήματος (α) είναι προσαρμοσμένος κατακόρυφος λεπτός σωλήνας. Στον οριζόντιο σωλήνα ρέει υγρό πυκνότητας ρ , με ταχύτητα v και στον κατακόρυφο σωλήνα σχηματίζεται στήλη ύψους h_1 .

A α. Ποιες από τις πιέσεις των σημείων A, B, Γ του σχήματος συνδέονται μεταξύ τους με το νόμο του Bernoulli;

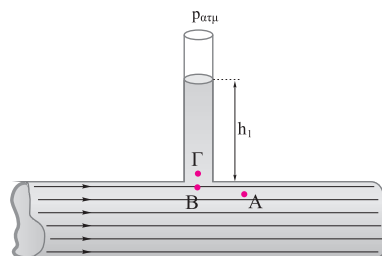
β. Να βρεθεί η πίεση p_B σε συνάρτηση με το h_1 .

B. Ο οριζόντιος σωλήνας του σχήματος (β) έχει διατομή με επιφάνεια A_B και στην κατεύθυνση ροής του υγρού φέρει στένωση με επιφάνεια διατομής A_A .

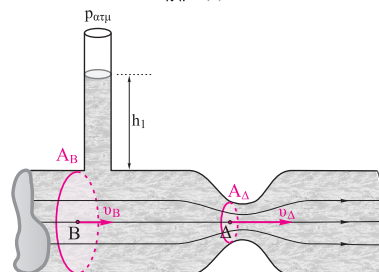
i. Να βρεθεί η πίεση του ρέοντος υγρού στη στένωση.

ii. Πώς συσχετίζονται μεταξύ τους οι πιέσεις p_B και p_A σύμφωνα με το νόμο του Bernoulli;

iii. Να βρεθεί η πίεση p_A σε συνάρτηση με το h .



Σχήμα (α)



Σχήμα (β)

Απάντηση

Aα. Για να σχετίζονται μεταξύ τους δύο πιέσεις με το νόμο του **Bernoulli** πρέπει να ανήκουν στην ίδια ρευματική φλέβα. Αυτό συμβαίνει μόνο στα σημεία A και B. Το σημείο Γ δεν ανήκει στο κινούμενο ρευστό και η πίεσή του δεν μπορεί να συσχετισθεί με τις πιέσεις των A, B μέσω της εξίσωσης του **Bernoulli**.

β. Η παρατήρηση ότι δε συμβαίνει μετακίνηση ρευστού μεταξύ των σημείων B και Γ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο σημείων είναι μηδέν ή $p_B = p_\Gamma$. Όμως $p_B = p_{\text{ατμ}} + \rho gh_1$.

$$\text{Άρα: } p_B = p_\Gamma = p_{\text{ατμ}} + \rho gh_1 \quad (1)$$

Bi. Σε οριζόντιο αγωγό θεωρούμε τον όρο ρgh ίδιο για όλα τα σημεία μιας φλέβας ανεξάρτητα από στενώσεις. Έτσι ο νόμος του **Bernoulli** για την οριζόντια φλέβα που διέρχεται από τα σημεία B, Δ γράφεται:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho v_\Delta^2 \quad (2)$$

ii. Οι ταχύτητες ροής του υγρού στα σημεία B και Δ σχετίζονται με την εξίσωση της συνέχειας.

$$A_B v_B = A_\Delta v_\Delta \quad \text{ή} \quad v_\Delta = \frac{A_B v_B}{A_\Delta} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) για την πίεση στη θέση Δ βρίσκουμε:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \frac{A_B^2}{A_\Delta^2} \quad \text{ή} \quad p_\Delta = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \left(1 - \frac{A_B^2}{A_\Delta^2}\right)$$

Επειδή $A_B > A_\Delta$ το περιεχόμενο της παρένθεσης είναι αρνητικό και $p_\Delta < p_B$.

iii. Αν στη στένωση υπήρχε κατακόρυφος σωλήνας και η στήλη σχημάτιζε ύψος h_2 , σύμφωνα με την (1) θα είχαμε

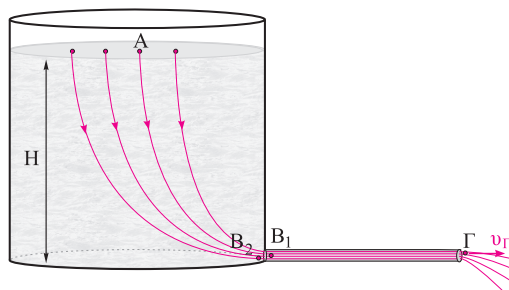
$$p_\Delta = p_{\text{ατμ}} + \rho gh_2$$

Επειδή $p_\Delta < p_B$ ισχύει $h_2 < h_1$, επομένως, αν στη στένωση υπήρχε κατακόρυφος σωλήνας η στήλη θα σχημάτιζε μικρότερο ύψος από αυτό του υπάρχοντος. (Βλέπε απαντημένο θέμα.....)

Είναι αληθαγμένο. Προσπάθησα να το προσαρμόσω σε αυτό που θέλεις να δείξεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Η δεξαμενή του σχήματος περιέχει νερό και είναι ανοικτή στην ατμόσφαιρα. Το νερό διοχετεύεται μέσω του οριζόντιου σωλήνα σταθερής διατομής στο σημείο εξόδου Γ. Το ύψος του νερού στη δεξαμενή είναι H και θεωρούμε ότι κατά την εκροή του νερού από το Γ το ύψος H δεν μεταβάλλεται. Να βρείτε:



- την ταχύτητα εκροής από το σημείο Γ.
- τις πιέσεις στα σημεία B_1 και B_2 του σχήματος.
- Να ερμηνευτούν τα αποτελέσματα του ερωτήματος β.

Απάντηση

- α. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για μια φλέβα νερού που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ.

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A + \rho gh = \frac{1}{2}\rho v_\Gamma^2 + p_\Gamma$$

Επειδή $p_A = p_\Gamma = p_{atm}$ και $v_A = 0$, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\rho gh = \frac{1}{2}\rho v_\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad v_\Gamma = \sqrt{2 \cdot gH}$$

- β. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bernoulli για την φλέβα νερού από το Α μέχρι το σημείο B_1 που η πίεση είναι p_1 .

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A + \rho gh = \frac{1}{2}\rho v_{B1}^2 + p_{B1} \quad (1)$$

Έχουμε: $p_A = p_{atm}$, $v_A = 0$ και $v_{B1} = 0$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει $p_{B1} = p_{atm} + \rho gH$

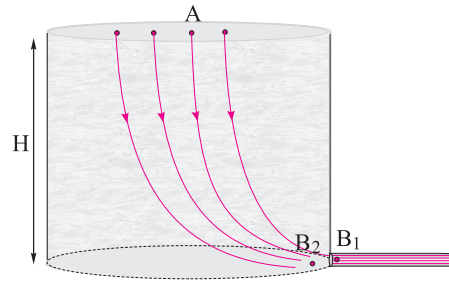
Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για την οριζόντια φλέβα νερού που διέρχεται από το σημείο B_2 και την έξοδο του σωλήνα, σημείο Γ.

$$\frac{1}{2}\rho v_{B2}^2 + p_{B2} = \frac{1}{2}\rho v_\Gamma^2 + p_\Gamma \quad (2)$$

Ο οριζόντιος σωλήνας είναι σταθερής διατομής, οπότε σύμφωνα με την εξίσωση της συνέχειας, επίσης $p_\Gamma = p_{atm}$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2), προκύπτει $p_{B2} = p_{atm}$.

Υ. Τα σημεία B_1 και B_2 παρότι είναι πάρα πολύ κοντά έχουν αισθητά διαφορετικές πιέσεις, δηλαδή φαίνεται να υπάρχει ασυνέχεια στην τιμή της πίεσης καθώς περνάμε από το δοχείο στο σωλήνα. Αν δημιουργήσουμε τις δύο κάθετες διατομές που διέρχονται από τα σημεία B_1 και B_2 θα έχουμε την εικόνα του σχήματος. Δηλαδή, όσο είμαστε μέσα στο δοχείο οι ρευματικές γραμμές είναι αραιές και μόλις αυτές εισέρχονται στο σωλήνα πυκνώνουν απότομα. Έτσι, αν γράψουμε την εξίσωση του **Bernoulli** μεταξύ των σημείων B_1 και B_2 , θα έχουμε μια απότομη αύξηση της ταχύτητας ροής και άρα μια απότομη πτώση της πίεσης. Ο συλλογισμός ότι τα σημεία Γ και B_1 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και άρα πρέπει να έχουν την ίδια πίεση είναι λανθασμένος, καθώς η προηγούμενη πρόταση ισχύει μόνο για ρευστά που βρίσκονται σε ισορροπία.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3