ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΑ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ (Ε.Ο.Μ.Κ.)

<table>
<tr>
<td>Πρότυπο</td>
<td>Πρότυπο ευθύγραμ-μης ομαλά μεταβαλλό-μενης κίνησης (Ε.Ο.Μ.Κ)</td>
<td>
Όταν η επιτάχυνση ενός σώματος παραμένει σταθερή σε σχέση με το χρόνο δημιουργείται ένα πρότυπο κίνησης που το ονομάζουμε ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση (Ε.Ο.Μ.Κ),

$$\left(\vec{\alpha} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\eta'\right) \Leftrightarrow \left(\text{Ε.Ο.Μ.Κ.}\right)$$

Όταν συμβαίνει αυτό, η ταχύτητα του σώματος μεταβάλλεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό

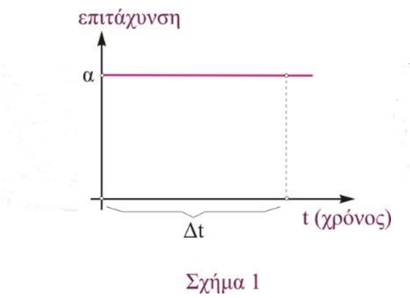
$$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = a = \sigma\tau\alpha\vartheta\varepsilon\rho o'$$

Η ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση διακρίνεται σε ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και σε ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Όταν η μεταβολή της ταχύτητας οδηγεί σε αύξηση του μέτρου της λέγεται επιταχυνόμενη, ενώ όταν οδηγεί σε μείωση του μέτρου της λέγεται επιβραδυνόμενη.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Νόμοι</td>
<td>Σχέσεις μεταξύ μεγεθών κινηματικής για α=σταθερό</td>
<td>
Ο συνδυασμός των μεγεθών , επιτάχυνση, (α), ταχύτητα , (υ), μετατόπιση (Δx), και χρόνος, (t), δημιουργούν ένα σύνολο τριών εξισώσεων που ονομάζονται εξισώσεις της κινηματικής για σταθερή επιτάχυνση και αποτελούν τους τρεις νόμους που περιγράφουν την ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.
Οι τρεις νόμοι εκτός από την μαθηματική μορφή μπορούν να διατυπωθούν με λόγια και με διαγράμματα. <u>Έχουμε κατανοήσει τους νόμους, όταν από τη μια μορφή διατύπωσης μπορούμε να περάσουμε στις άλλες δύο και από τον ένα νόμο στους άλλους δύο.</u>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Νόμος</td>
<td>Νόμος της επιτάχυνσης

$\alpha = \mathbf{\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\eta'}$</td>
<td>
Νόμο της επιτάχυνσης στην Ε.Ο.Μ.Κ ονομάζουμε τη σχέση της επιτάχυνσης με το χρόνο και διατυπώνεται ως εξής:
-Με λόγια: Η επιτάχυνση ενός σώματος που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση παραμένει σταθερή σε σχέση με το χρόνο.

-Με μαθηματικά: $\alpha = \mathbf{\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\eta'}$ (1)

Με διάγραμμα :



Σχήμα 1

Αξίζει να προσέξουμε το φυσικό μέγεθος που κρύβεται στο εμβαδό της γραφικής παράστασης α-t. Όπως προκύπτει από το σχήμα

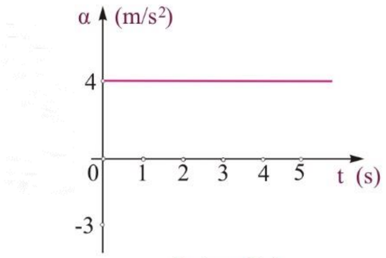
Εμβαδό= (ύψος) x (βάση)= α ˙ Δt = Μεταβολή της ταχύτητας

Άρα στο εμβαδό της γραφικής παράστασης α-t κρύβεται η μεταβολή της ταχύτητας.

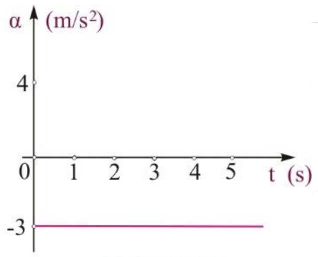
Στα διαγράμματα (α),(β) που ακολουθούν παριστάνονται οι επιταχύνσεις δύο σωμάτων σε σχέση με το χρόνο. Το διάγραμμα (α) μας πληροφορεί ότι το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται κατά +4m/s κάθε 1s.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Νόμος της επιτάχυνσης

$\alpha = \textbf{σταθερη}'$</td>
<td>Το διάγραμμα (β) μας πληροφορεί ότι το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται κατά $-3\dfrac{m}{s}$ κάθε 1s.



Σχήμα 2(α)



Σχήμα 2(β)</td>
</tr>
<tr>
<td>Νόμος</td>
<td>Νόμος της ταχύτητας στην Ε.Ο.Μ.Κ.

$\upsilon = \upsilon_{\alpha\rho\chi} + \alpha t$</td>
<td>Νόμο της ταχύτητας στην Ε.Ο.Μ.Κ ονομάζουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με το χρόνο και προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της επιτάχυνσης,
$$\alpha = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}.$$
Αφού α=σταθερό σε σχέση το χρόνο, μπορούμε να γράψουμε:
$$\Delta\upsilon = \alpha\,\Delta t \qquad (2)$$
και να διατυπώσουμε την πρόταση : στην Ε.Ο.Μ.Κ. οι μεταβολές ταχυτήτων, Δυ, είναι ανάλογες των χρονικών διαστημάτων, Δt.

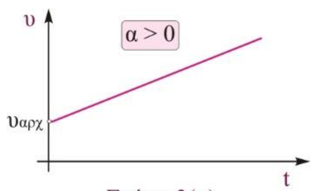
Για να βρούμε την ταχύτητα υ του σώματος σε σχέση με το χρόνο t , πρέπει να γνωρίζουμε την αρχική ταχύτητα, $\upsilon_{\alpha\rho\chi}$. Από τη σχέση (2) προκύπτει:
$$\Delta\upsilon = \upsilon - \upsilon_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow \ \upsilon = \upsilon_{\alpha\rho\chi} + \Delta\upsilon \ \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{\alpha\rho\chi} + \alpha\Delta t \qquad (3)$$
Η σχέση (3) απλουστεύεται αν θέσουμε $t_{\alpha\rho\chi} = 0$, τότε $\Delta t = t$ και παίρνουμε:
$$\upsilon = \upsilon_{\alpha\rho\chi} + \alpha t \qquad (4)$$
που αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του νόμου της ταχύτητας. Ο νόμος διατυπώνεται ως εξής:
Στην Ε.Ο.Μ.Κ. η ταχύτητα σε σχέση με το χρόνο (υ-t) είναι συνάρτηση α΄ βαθμού και η γραφική της παράσταση είναι πάντα ευθεία γραμμή.
Στην περίπτωση που $\upsilon_{\alpha\rho\chi} = 0$, ο νόμος απλοποιείται ακόμη περισσότερο και γίνεται
$$\upsilon = \alpha t \qquad (5)$$
Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα είναι ανάλογη του χρόνου t.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Νόμος της ταχύτητας στην Ε.Ο.Μ.Κ με διάγραμμα</td>
<td>

Η ταχύτητα σε σχέση με το χρόνο (υ-t) στην Ε.Ο.Μ.Κ. είναι συνάρτηση α΄ βαθμού

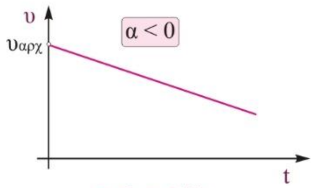
$$\upsilon = \upsilon_{\alpha\rho\chi} + \alpha t$$

οπότε η γραφική της παράσταση είναι πάντα μια ευθεία γραμμή που ξεκινά από την αρχική ταχύτητα.



Σχήμα 3(α)

Η κλίση της ευθείας γραμμής εξαρτάται από το πρόσημο της επιτάχυνσης. Αν η επιτάχυνση έχει θετικό πρόσημο, τότε η κλίση της γραμμής είναι θετική (σχήμα 3α).

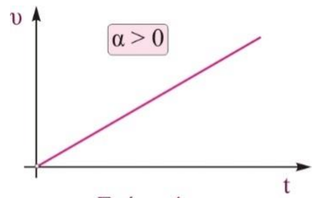


Σχήμα 3(β)

Αν η επιτάχυνση έχει αρνητικό πρόσημο, τότε η κλίση της γραμμής είναι αρνητική (σχήμα 3β).

Στην περίπτωση που $\upsilon_{\alpha\rho\chi} = 0$, ο νόμος απλοποιείται ακόμη περισσότερο γίνεται

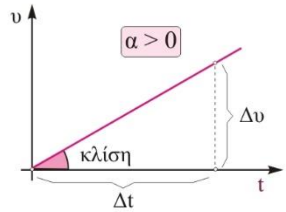
$$\upsilon = \alpha t \qquad (5)$$



Σχήμα 4

οπότε στην περίπτωση αυτή η γραφική παράσταση ξεκινά από την αρχή των αξόνων. (σχήμα 4).

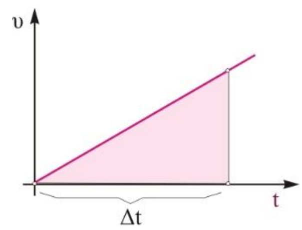
Αξίζει να προσέξουμε ότι σε μία γραφική παράστασης υ-t βρίσκονται κρυμμένα δύο άλλα φυσικά μεγέθη , η επιτάχυνση α και η μετατόπιση Δx.
Η επιτάχυνση α βρίσκεται κρυμμένη στην κλίση της γραφικής παράστασης υ-t .



Στην κλίση της γραφικής παράστασης υ - t κρύβεται η επιτάχυνση

Σχήμα 5

$$κλι'ση = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \alpha$$

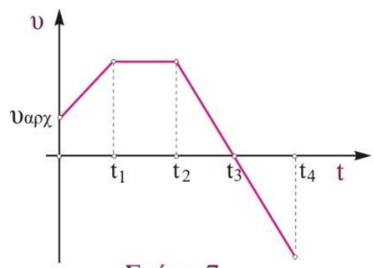
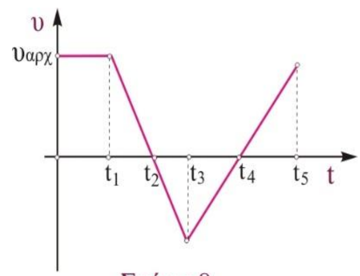


Σχήμα 6

Επίσης, όπως είδαμε στο μάθημα 2 στο εμβαδό της γραφικής παράστασης υ-t βρίσκεται κρυμμένη η μετατόπιση. Έτσι, στο σχήμα 6, στο εμβαδό του τριγώνου κρύβεται η μετατόπιση του σώματος στο χρονικό διάστημα Δt.

$$Εμβαδο' = \frac{(υψος)\cdot(βαση)}{2} = \frac{\upsilon\cdot\Delta t}{2} = Μετατοπιση$$

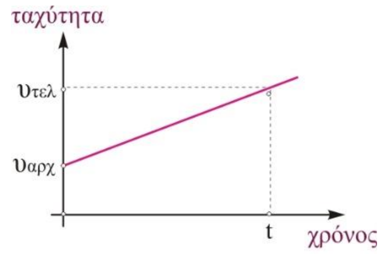
</td>
</tr>
</table>

Πρότυπο	Ευθύγραμμη Ομαλά Επιταχυνό- μενη κίνηση	Την κίνηση ενός σώματος την ονομάζουμε **ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση** όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν την ίδια κατεύθυνση (ίδιο πρόσημο). Στην περίπτωση αυτή το μέτρο της ταχύτητας αυξάνεται.  Σχήμα 7 Στο διπλανό σχήμα η κίνηση είναι επιταχυνόμενη στα χρονικά διαστήματα (0, t_1) και (t_3, t_4). Στο χρονικό διάστημα (0, t_1) η ταχύτητα είναι θετική και η επιτάχυνση το ίδιο. Στο χρονικό διάστημα (t_3, t_4) η ταχύτητα είναι αρνητική και η επιτάχυνση το ίδιο.
Πρότυπο	Ευθύγραμμη Ομαλά Επιβραδυνό- μενη κίνηση	Την κίνηση ενός σώματος την ονομάζουμε **ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση** όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετες κατευθύνσεις (αντίθετα πρόσημα). Στην περίπτωση αυτή το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται.  Σχήμα 8 Στο διπλανό σχήμα η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη στα χρονικά διαστήματα (t_1, t_2) και (t_3, t_4). Στο χρονικό διάστημα (t_1, t_2) η ταχύτητα είναι θετική και η επιτάχυνση αρνητική. Στο χρονικό διάστημα (t_3, t_4) η ταχύτητα είναι αρνητική και η επιτάχυνση θετική.

<table>
<tr>
<td>Νόμος</td>
<td>Νόμος της Μετατόπισης στην Ε.Ο.Μ.Κ.

$\Delta x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$</td>
<td>
Νόμο της μετατόπισης στην Ε.Ο.Μ.Κ ονομάζουμε τη σχέση που συνδέει τη μετατόπιση, Δx, με το χρόνο, t, και προκύπτει από την παρατήρηση ότι στο εμβαδό μιας γραφικής παράστασης υ-t κρύβεται η μετατόπιση, Δx.

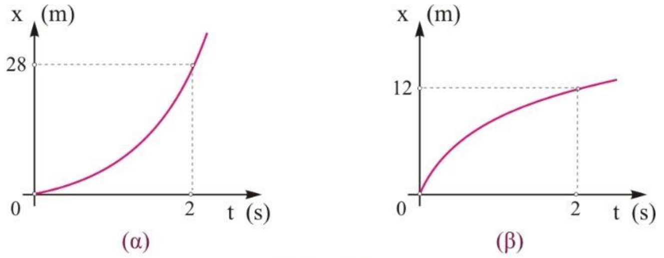
Στο σχήμα δείχνεται η ταχύτητα σε σχέση με το χρόνο ενός σώματος που εκτελεί ΕΟΜΚ . Τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα έχει (αρχική) ταχύτητα υ_0 και τη στιγμή t έχει υ. Για να βρούμε τη μετατόπιση του σώματος από τη στιγμή t=0 μέχρι τη στιγμή t αρκεί να βρούμε το εμβαδό του τραπεζίου που σχηματίζεται από τη γραμμή που παριστάνει την ταχύτητα, τον άξονα των χρόνων και τις κατακορύφους που διέρχονται από τις χρονικές στιγμές t=0 και t.



Σχήμα 9

$$\text{Ε}\mu\beta\alpha\delta o' = \frac{\beta\alpha\sigma\eta\ \mu\iota\kappa\rho\eta' + \beta\alpha\sigma\eta\ \mu\varepsilon\gamma\alpha'\lambda\eta}{2}\cdot \upsilon'\psi o\varsigma =$$
$$\frac{\tau\alpha\chi\upsilon'\tau\eta\tau\alpha\ \alpha\rho\chi\iota\kappa\eta' + \tau\alpha\chi\upsilon'\tau\eta\tau\alpha\ \tau\varepsilon\lambda\iota\kappa\eta'}{2}\cdot \chi\rho o\nu\iota\kappa\eta'\ \delta\iota\alpha'\rho\kappa\varepsilon\iota\alpha \Rightarrow$$
$$\Delta x = \frac{\upsilon_0 + \upsilon_0 + \alpha t}{2}\cdot\left(t-0\right) = \frac{2\upsilon_0 + \alpha t}{2}\cdot t \Rightarrow$$
$$\Delta x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (5)$$
Η σχέση (5) αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του νόμου της μετατόπισης ενός σώματος που εκτελεί Ε.Ο.Μ.Κ. και με λόγια εκφράζεται ως εξής:
Η μετατόπιση ενός σώματος που εκτελεί Ε.Ο.Μ.Κ είναι συνάρτηση β΄ βαθμού ως προς το χρόνο t.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Νόμος</td>
<td>Νόμος της θέσης
$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
ή
$x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
ή
$x = \frac{1}{2}\alpha t^2$</td>
<td>
Για να προσδιορίσουμε τη θέση x του σώματος πρέπει να γνωρίζουμε την αρχική θέση, x_0, δηλαδή τη θέση του τη χρονική στιγμή t=0.
Εύκολα προκύπτει: $x - x_0 = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (6)
Η σχέση (6) αποτελεί τη μαθηματική διατύπωση του νόμου της θέσης ενός σώματος που εκτελεί Ε.Ο.Μ.Κ.

Αν η αρχική θέση του σώματος βρίσκεται στο σημείο αναφοράς , $x_0 = 0$, τότε η σχέση (6) γίνεται $x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (7)
Η σχέση (6) απλοποιείται ακόμη περισσότερο αν και η αρχική ταχύτητα είναι μηδέν, $\upsilon_0 = 0$, τότε παίρνουμε
$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (8)$$
</td>
</tr>
</table>

Νόμος	**Ο νόμος της θέσης στην Ε.Ο.Μ.Κ. με διαγράμματα**	Η σχέση που δίνει τη θέση, x, ενός σώματος που εκτελεί Ε.Ο.Μ.Κ. , είναι μια συνάρτηση β΄ βαθμού ως προς το χρόνο, $x=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$, οπότε η γραφική της παράσταση σε άξονες x-t είναι μία παραβολή της οποίας ο προσανατολισμός των κοίλων καθορίζεται από το πρόσημο του συντελεστή του t^2 , δηλαδή το πρόσημο του α. Αν η επιτάχυνση α έχει θετικό πρόσημο τότε τα κοίλα ‘βλέπουν’ προς τα θετικά του άξονα x΄Οx. Αν η επιτάχυνση α έχει αρνητικό πρόσημο τότε τα κοίλα ‘βλέπουν’ προς τα αρνητικά του άξονα x΄Οx. Έτσι, για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της σχέσης $x=10t+\frac{1}{2}4t^2$ είναι όπως στο σχήμα α, ενώ η γραφική παράσταση της σχέσης $x=10t-\frac{1}{2}4t^2$ είναι όπως στο σχήμα β.  Σχήμα 10

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.
Η ταχύτητα ενός σώματος που εκτελεί Ε.Ο.Μ.Κ. περιγράφεται από τη σχέση $\upsilon = \upsilon_0 + 2t$ (S.I.).
Α. Να γίνει το διάγραμμα υ=f(t) για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 5s$.
Β. Να γίνει το διάγραμμα α=f(t) για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 5s$.
Γ. Να γραφεί η εξίσωση που δίνει κάθε στιγμή τη θέση του σώματος, αν γνωρίζουμε ότι τη χρονική στιγμή t=0 , βρίσκεται στη θέση x=0.
Δ. Να γίνει το διάγραμμα x=f(t) για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 5s$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.
Ένα σώμα κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά με ταχύτητα υ=10m/s. Τη χρονική στιγμή t=0 και ενώ διέρχεται από τη θέση x=0, αρχίζει να επιταχύνεται με σταθερή επιτάχυνση $α=3m/s^2$ για χρονικό διάστημα 6s.
Α. Να γραφούν οι εξισώσεις α=f(t), υ=f(t), x=f(t), για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 6s$.
Β. Να γίνουν σε αριθμημένους ορθογώνιους άξονες οι γραφικές παραστάσεις των α=f(t), υ=f(t), x=f(t), για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 6s$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.
Ένα σώμα κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά με ταχύτητα υ=10m/s. Τη χρονική στιγμή t=0 και ενώ διέρχεται από τη θέση x=0, αρχίζει να επιβραδύνεται με σταθερή επιτάχυνση $α=-2m/s^2$ μέχρι να σταματήσει.
Α. Να γραφούν οι εξισώσεις α=f(t), υ=f(t), x=f(t).
Β. Να βρεθεί για πόσο χρονικό διάστημα το σώμα κινείται.
Β. Να γίνουν σε αριθμημένους ορθογώνιους άξονες οι γραφικές παραστάσεις των α=f(t), υ=f(t), x=f(t), για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 5s$.

	Μεθοδολο- γία επίλυσης προβλημά- των με σώ- ματα που εκτελούν Ε.Ο.Μ.Κ.	Για να λύσουμε προβλήματα που περιέχουν κίνηση ενός ή δύο σωμάτων ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Α. Χαράσσουμε τον άξονα κίνησης , σημειώνουμε το σημείο αναφοράς και ορίζουμε θετικό- αρνητικό πρόσημο στον άξονα. Β. Εντοπίζουμε και σημειώνουμε τις αρχικές θέσεις των σωμάτων πάνω στον άξονα. Γ. Σχεδιάζουμε τα διανύσματα των αρχικών ταχυτήτων των σωμάτων με τρόπο που να δείχνεται η κατεύθυνση κίνησης των σωμάτων και το αλγεβρικό τους πρόσημο. Δ. . Σχεδιάζουμε τα διανύσματα των επιταχύνσεων των σωμάτων με τρόπο που να δείχνεται η κατεύθυνση κίνησης των σωμάτων και το αλγεβρικό τους πρόσημο. Ε. Γράφουμε τις εξισώσεις που δίνουν κάθε στιγμή τις ταχύτητες των σωμάτων. ΣΤ. Γράφουμε τις εξισώσεις που δίνουν κάθε στιγμή τις θέσεις των σωμάτων. Ζ. Οι εξισώσεις των βημάτων Ε και ΣΤ σε συνδυασμό με τα άλλα δεδομένα του προβλήματος θα μας οδηγούν στη λύση του.