**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1**
**ΘΕΜΑ 1$^0$**
**1.** α
**2.** α
**3.** α
**4.** β
**5.** 1Σ, 2Σ , 3Σ , 4Λ, 5Λ
**ΘΕΜΑ 2$^0$**
**1.** δ

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ **και** $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4K}} = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = \frac{T_1}{2}$ .Επίσης

$E_1 = \frac{1}{2}K(2A)^2 = 2KA^2$ και $E_2 = \frac{1}{2}4KA^2 = 2KA^2$ άρα $E_1$=$E_2$.

**2.** γ
Ένα όρος από την επόμενη κοιλάδα απέχουν κατά λ/2. Οπότε το μήκος των κυμάτων είναι λ=2m.
Για το πλάτος ταλάντωσης των σημείων μετά τη συμβολή έχουμε:

Σημείο Α : $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right| = 2A$ , Σημείο Β : $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2}\right| = \sqrt{2}A$

Σημείο Γ : $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right| = 0$ , Σημείο Δ : $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right| = 2A$

Σημείο Ε : $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right| = 2A$ , Σημείο Ζ : $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2}\right| = \sqrt{2}A$

**3. γ**

$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_K^2 + \upsilon_{\gamma\rho}^2}$ όμως λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση είναι $\upsilon_{\gamma\rho}$= ω.R= $\upsilon_K$ .

Άρα $\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_K^2 + \upsilon_K^2} = \sqrt{2}\upsilon_K = 4\sqrt{2}m/s$.

**4.** α

Για ελαστική κρούση έχουμε: $\upsilon_2' = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}$

Η ταχύτητα του σώματος μάζας $m_2$ αμέσως μετά την κρούση είναι και η μέγιστη ταχύτητα της α.α.τ που ακολουθεί. Άρα

$$\omega.A = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{K}{m_2}}.A = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow .A = \frac{2m_1\upsilon_1\sqrt{m_2}}{\sqrt{K}.(m_1 + m_2)}$$

Για πλαστική κρούση από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$m_1.\upsilon_1$=$(m_1+m_2).V \Leftrightarrow V = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}$ .

Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι και η μέγιστη ταχύτητα της α.α.τ που ακολουθεί. Άρα

$$V = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \omega'.A' = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}}.A' = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow A' = \frac{m_1\upsilon_1}{\sqrt{K(m_1 + m_2)}}$$

$$A=A' \Leftrightarrow \frac{2m_1\upsilon_1\sqrt{m_2}}{\sqrt{K}.(m_1 + m_2)} = \frac{m_1\upsilon_1}{\sqrt{K(m_1 + m_2)}} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{m_2}}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{m_2} = \sqrt{m_1 + m_2} \Leftrightarrow 4m_2 = m_1 + m_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m_1 = 3m_2 .$$

**ΘΕΜΑ 3[0]**

**α.** Για κάθε ράβδο που στρέφεται γύρω από άκρο της έχουμε:

$$I_1 = I_2 = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\frac{L^2}{12} + M\frac{L^2}{4} = \frac{M.L^2}{3} = 2\ kg.m^2$$

Για τη ράβδο που είναι παράλληλη στον άξονα περιστροφής έχουμε:

$$I_3 = \sum m_i r_i^2 = L^2 \sum m_i = ML^2 = 6 kg.m^2\ .$$

Τελικά $I=I_1+I_2+I_3=10\ kg.m^2$.

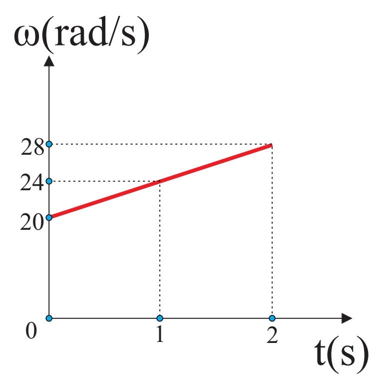
**β.** Από το θεμελιώδη νόμο στη στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma\tau = I.\alpha_\gamma \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{F.L}{I} \Leftrightarrow \alpha_\gamma = 4 rad/s^2 \quad \text{και} \quad \alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Leftrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha_\gamma.t \Leftrightarrow \omega = 21,6 rad/s \cdot$$

**γ.**

Τη χρονική στιγμή $t_1=1s$ έχουμε: $\omega_1 = \omega_0 + \alpha_\gamma.t_1 \Leftrightarrow \omega_1 = 24 rad/s$ .

Τη χρονική στιγμή $t_2=2s$ έχουμε: $\omega_2 = \omega_0 + \alpha_\gamma.t_2 \Leftrightarrow \omega_2 = 28 rad/s$ .




**δ.** Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας στη στροφική κίνηση έχουμε:

$$K_2 - K_1 = W_F \Leftrightarrow W_F = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = 1040 j \cdot$$

( ή $\Delta\theta = E_{\tau\rho} = \frac{24+28}{2} rad = 26 rad$ και $W_F = F.L.\Delta\theta = 1040 j$ )

**ΘΕΜΑ 4[0]**

**α.** Η μηχανική ενέργεια του σώματος $\Sigma_2$ διατηρείται άρα

$$\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 + 0 = m_2 gL + 0 \Leftrightarrow \upsilon_2' = \sqrt{2gL} \Leftrightarrow \upsilon_2' = 2 m/s \cdot$$

β. Από τις σχέσεις της κεντρικής ελαστικής κρούσης έχουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \Leftrightarrow \upsilon_1 = \upsilon_2' = 2 m/s \cdot$$

**γ.** Από Α.Δ.Ε στη ταλάντωση παίρνουμε: $E_T = U_T + K \Leftrightarrow \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ με x=(ΟΔ) και A=(ΟΓ)

Τελικά (ΟΓ)=$\sqrt{(O\Delta)^2 + \frac{m_1\upsilon_1^2}{K}}$ $\Leftrightarrow$ (ΟΓ)=0,3m

**δ.** Το σώμα $\Sigma_1$ αμέσως μετά τη κρούση έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.\upsilon_1 \Leftrightarrow \upsilon_1' = 0$.

Κατά συνέπεια βρίσκεται στην ακραία θέση της νέας του ταλάντωσης και θα διέλθει από τη θέση ισορροπίας του μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t=\frac{T}{4}$ με $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{K}} \Leftrightarrow T = \frac{\pi}{5}s$ . Άρα $\Delta t = \frac{\pi}{20}s$ .

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2**

**ΘΕΜΑ 1$^0$**

**1.** γ

**2.** δ

**3.** δ

**4.** δ

**5.** 1Σ, 2Λ , 3Σ , 4Σ, 5Λ

**ΘΕΜΑ 2$^0$**

**1.** α

$$E_1=E_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1}=\frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} \Leftrightarrow \frac{Q_1^2}{C_1}=\frac{Q_2^2}{4C_1} \Leftrightarrow Q_1=\frac{Q_2}{2}$$

Επίσης

$$E_1=E_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}L_1I_1^2=\frac{1}{2}L_2I_2^2 \Leftrightarrow 4L_2I_1^2=L_2I_2^2 \Leftrightarrow I_1=\frac{I_2}{2}$$

**2.** γ

Για το σημείο x=0 την t =5s είναι φ=10π rad άρα $\varphi = 2\pi\frac{t}{T} \Leftrightarrow T=\frac{2\pi.t}{\varphi} \Leftrightarrow$ T=1s.

Για το σημείο x=10m την t =5s είναι φ=0 άρα $\varphi=2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}) \Leftrightarrow 0=2\pi(\frac{5}{1}-\frac{10}{\lambda}) \Leftrightarrow$ λ=2m. Οπότε $\upsilon_\delta=\frac{\lambda}{T}=2m/s$ .

**3.** β

Από το θεώρημα παραλλήλων αξόνων έχουμε: $I=I_{cm}+M.R^2 \Leftrightarrow I=\frac{2}{5}M.R^2+M.R^2=\frac{7}{5}M.R^2$

**4.** γ

Για τις ταχύτητες των σωμάτων μετά τη κρούση έχουμε:

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}.\upsilon_1 \text{ και } \upsilon_2'=\frac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2} \text{ άρα } \lambda=\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_2'} \Leftrightarrow \lambda=\frac{\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}.\upsilon_1}{\frac{2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}} \Leftrightarrow \lambda=\frac{m_1-m_2}{2m_1} \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}-\frac{m_2}{2m_1} \text{ . Οπότε}$$

$\lambda \le \frac{1}{2}$ . ( Για $m_1>>m_2$ είναι $\lambda=\frac{1}{2}$).

**ΘΕΜΑ 3$^0$**

**α.** Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)}=\vec{p}_{ολ(μετα)} \Leftrightarrow m_1.\upsilon_1-m_2.\upsilon_2=0 \Leftrightarrow \upsilon_2=\frac{m_1\upsilon_1}{m_2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \upsilon_2=100m/s$.

**β**. Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε: $\vec{p}_{ολ(πριν)}=\vec{p}_{ολ(μετα)} \Leftrightarrow m_1.\upsilon_1+m_2.\upsilon_2=(m_1+m_2).V \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V=\frac{m_1.\upsilon_1+m_2.\upsilon_2}{m_1+m_2}$ (1)

$E_{απωλ}=K_{πριν}-K_{μετά} \Leftrightarrow E_{απωλ}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$ .Από την (1) έχουμε:

$$E_{απωλ}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1.\upsilon_1+m_2.\upsilon_2}{m_1+m_2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_{απωλ}=\frac{1}{2}(m_1\upsilon_1^2+m_2\upsilon_2^2-\frac{m_1^2.\upsilon_1^2+m_2^2.\upsilon_2^2+2m_1m_2\upsilon_1\upsilon_2}{m_1+m_2}) \Leftrightarrow E_{απωλ}=\frac{1}{2}(\frac{m_1m_2.\upsilon_1^2+m_1m_2.\upsilon_2^2-2m_1m_2\upsilon_1\upsilon_2}{m_1+m_2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_{απωλ}=\frac{m_1m_2(\upsilon_1-\upsilon_2)^2}{2(m_1+m_2)} \Leftrightarrow E_{απωλ}=\frac{0,4.1,6.(400-100)^2}{2.2}j=14400j$$

**γ.** Για ομόρροπη κίνηση έχουμε: $E_{\alpha\pi\omega\lambda}=\dfrac{m_1m_2(\upsilon_1-\upsilon_2)^2}{2(m_1+m_2)}$

ενώ για αντίρροπη κίνηση έχουμε: $E'_{\alpha\pi\omega\lambda}=\dfrac{m_1m_2(\upsilon_1+\upsilon_2)^2}{2(m_1+m_2)}$

$$E'_{\alpha\pi\omega\lambda}=4E_{\alpha\pi\omega\lambda}\Leftrightarrow\frac{m_1m_2(\upsilon_1+\upsilon_2)^2}{2(m_1+m_2)}=4\frac{m_1m_2(\upsilon_1-\upsilon_2)^2}{2(m_1+m_2)}\Leftrightarrow\upsilon_1^2+\upsilon_2^2+2\upsilon_1\upsilon_2=4\upsilon_1^2+4\upsilon_2^2-8\upsilon_1\upsilon_2\Leftrightarrow$$

$$3\upsilon_1^2+3\upsilon_2^2-10\upsilon_1\upsilon_2=0\Leftrightarrow 3\frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2}+3-10\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=0\Leftrightarrow 3\lambda^2-10\lambda+3=0\cdot$$

Από τη λύση της πιο πάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης παίρνουμε: λ=3 ή λ=$\dfrac{1}{3}$.

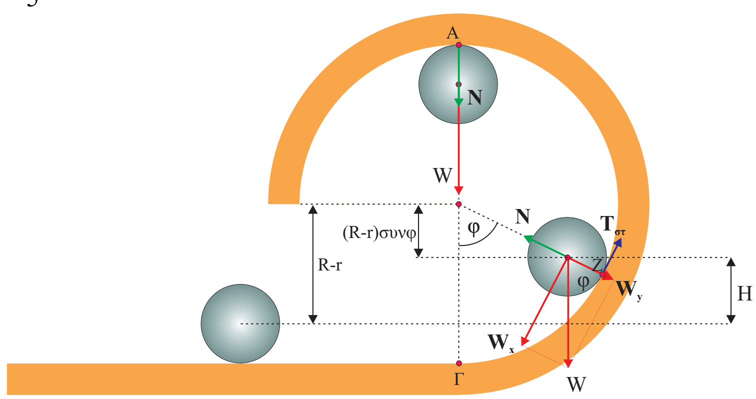
**ΘΕΜΑ 4$^0$**

**α.** Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας έχουμε:

$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{cm}\Leftrightarrow T_{\sigma\tau}-W_x=m\cdot\alpha_{cm}\Leftrightarrow T_{\sigma\tau}-mg\eta\mu\varphi=m\cdot\alpha_{cm}\quad(1)$$

Για τη στροφική κίνηση της σφαίρας έχουμε:

$$\Sigma\underset{(cm)}{\tau}=I\cdot\alpha_\gamma\Leftrightarrow -T_{\sigma\tau}\cdot r=\frac{2mr^2}{5}\alpha_\gamma\Leftrightarrow -T_{\sigma\tau}=\frac{2}{5}mr\alpha_\gamma\quad(2)$$ και λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση είναι $\alpha_{cm}=\alpha_\gamma\cdot r\quad(3)$
.




Από τις (1), (2), (3) παίρνουμε

$$-mg\eta\mu\varphi=m\alpha_{cm}+\frac{2}{5}m\alpha_{cm}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha_{cm}=-\frac{5}{7}g\eta\mu\varphi\Leftrightarrow\ \alpha_{cm}=-4m/s^2$$

και $\dfrac{d\omega}{dt}=\alpha_\gamma=\dfrac{\alpha_{cm}}{r}=-\dfrac{20}{3}rad/s^2$

**β.** Η μηχανική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται άρα

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2=mgH\Leftrightarrow\frac{1}{2}m\upsilon_0^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{\upsilon_0^2}{r^2}=mgH\Leftrightarrow\frac{7}{10}\upsilon_0^2=g(R-r)(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\upsilon_0=\sqrt{\frac{10}{7}g(R-r)(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}\Leftrightarrow\upsilon_0=2m/s$$

**γ.** Για το ανώτερο σημείο Α της τροχιάς της σφαίρας στην κυκλική επιφάνεια

ισχύει: $N+mg=F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho.}\Leftrightarrow N+mg=\dfrac{m\upsilon_A{}^2}{R-r}\Leftrightarrow N=\dfrac{m\upsilon_A{}^2}{R-r}-mg$ με $N\geq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{m\upsilon_A{}^2}{R-r} \geq mg \Leftrightarrow \upsilon_A \geq \sqrt{g(R-r)} \Leftrightarrow \upsilon_A \geq \sqrt{14}m/s.$$

Από Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας από το Γ στο Α είναι:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma{}^2 + \frac{1}{2}I\omega_\Gamma{}^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_A{}^2 + \frac{1}{2}I\omega_A{}^2 + 2mg(R-r) \Leftrightarrow m\upsilon_\Gamma{}^2 + \frac{2}{5}m_r{}^2\frac{\upsilon_\Gamma{}^2}{r^2} = m\upsilon_A{}^2 + \frac{2}{5}mr^2\frac{\upsilon_A{}^2}{r^2} + 4mg(R-r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{5}\upsilon_\Gamma{}^2 = \frac{7}{5}\upsilon_A{}^2 + 4g(R-r) \Leftrightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_A{}^2 + \frac{20}{7}g(R-r)}.$$

Η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας της σφαίρας για να έχουμε ασφαλή ανακύκλωση (θέτουμε $\upsilon_A = \sqrt{14}m/s$ ) είναι $\upsilon_0 = \upsilon_\Gamma = \sqrt{54}m/s$ .

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3**

**ΘΕΜΑ 1$^0$**

**1.** β
**2.** β
**3.** β
**4.** δ
**5.** 1Λ, 2Λ , 3Σ , 4Λ, 5Λ

**ΘΕΜΑ 2$^0$**

**1.** α

Ισχύει : $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow A_1^2 = A_0.A_2 \Leftrightarrow A_1 = \sqrt{A_0.A_2} \Leftrightarrow A_1 = 90cm$

**2.** α

Από το νόμο του Snell έχουμε:

$$n.\eta\mu 30^0 = n_\alpha.\eta\mu 45^0 \Leftrightarrow n = \sqrt{2}$$

**3.** γ

Από τις σχέσεις της κεντρικής ελαστικής κρούσης έχουμε

$$\upsilon_1{}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.\upsilon_1 = \frac{2m_2 - m_2}{2m_2 + m_2}.\upsilon_1 = \frac{1}{3}\upsilon_1 \text{ και } \upsilon_2{}' = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} = \frac{2.2m_2\upsilon_1}{2m_2 + m_2} = \frac{4}{3}\upsilon_1$$

**4.** β

Η μηχανική ενέργεια των κυλίνδρων διατηρείται άρα

$$MgH = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow MgH = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon^2}{R^2} \Leftrightarrow gH = \frac{3}{4}\upsilon^2 \Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{4gH}{3}}$$

Αφού οι κύλινδροι αφήνονται από το ίδιο ύψος φθάνουν στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα ίδιου μέτρου.

**ΘΕΜΑ 3$^0$**

**α.** Η περίοδος του κύματος είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2s$ . Τα κύματα φθάνουν στο σημείο Β με χρονική διαφορά $\Delta t = \frac{T}{4} = 0,5s$ . Άρα $\upsilon_\delta = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = 4m/s$ .

**β.** Το μήκος κύματος είναι $\lambda = \upsilon_\delta.T = 8m$ .

Άρα για το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Β έχουμε: $A_B = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x_1 - x_2}{2\lambda}\right| = 0,2.\frac{\sqrt{2}}{2}m = 0,1\sqrt{2}m$

**γ.** $y_B(t) = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x_1 - x_2}{2\lambda}\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda}) \Leftrightarrow y_B(t) = 0,1\sqrt{2}\eta\mu 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{1}{2})(S.I)$

Άρα $\upsilon_B(t) = 0,1\pi\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{1}{2})(S.I)$

**δ.** Έστω Α και Β δύο διαδοχικά σημεία ενίσχυσης του τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ .
Για το Α ισχύει: $\Pi_1A - \Pi_2A = N.\lambda$ (1)
Για το Β ισχύει: $\Pi_1B - \Pi_2B = N'.\lambda \Leftrightarrow \Pi_1B - \Pi_2B = (N+1).\lambda$ (2)
Αφαιρώντας κατά μέλη τις 1,2 παίρνουμε:

$\Pi_1B - \Pi_2B - \Pi_1A + \Pi_2A = 1.\lambda \Leftrightarrow \Pi_1B - \Pi_1A + \Pi_2A - \Pi_2B = \lambda \Leftrightarrow AB + AB = \lambda \Leftrightarrow AB = \frac{\lambda}{2}$.

Για να έχουμε τουλάχιστον τρία σημεία ενίσχυσης στο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ πρέπει $\Pi_1\Pi_2 \geq 2.\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \Pi_1\Pi_2 \geq 8m$ .

Για να έχουμε τουλάχιστον πέντε σημεία ενίσχυσης στο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ πρέπει $\Pi_1\Pi_2 \geq 4.\frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \Pi_1\Pi_2 \geq 16m$ .

Επομένως για να έχουμε μόνο τρία σημεία ενίσχυσης στο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ πρέπει $8m \leq \Pi_1\Pi_2 < 16m$ .

**ΘΕΜΑ 4$^0$**

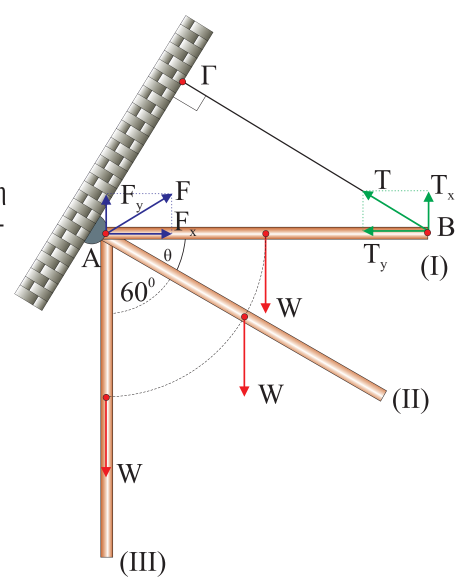
**1.** $\underset{(A)}{\Sigma\tau} = 0 \Leftrightarrow W\frac{L}{2} - T.(A\Gamma) = 0 \Leftrightarrow T = W\frac{L}{2(A\Gamma)} \Leftrightarrow T = 150N$ .

$T_y = T.\eta\mu\hat{B} \Leftrightarrow T_y = T.\frac{A\Gamma}{AB} \Leftrightarrow T_y = 100N$ και $T_x = \sqrt{T^2 - T_y^2} = 50\sqrt{5}N$ .

$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow F_x - T_x = 0 \Leftrightarrow F_x = T_x \Leftrightarrow F_x = 50\sqrt{5}N$

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow F_y - T_y = 0 \Leftrightarrow F_y = T_y \Leftrightarrow F_y = 100N$ και

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 150N$ .




**2.α**
Μετά το κόψιμο του νήματος η ράβδος αρχίζει να στρέφεται γύρω από το άκρο της Α. Η ροπή του βάρους μεταβάλλεται κατά την πτώση της ράβδου και κατά συνέπεια μεταβάλλεται και η γωνιακή της επιτάχυνση.
**2.β**

$I_A = I_{cm} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}$

$\underset{(A)}{\Sigma\tau} = I_A.\alpha_\gamma \Leftrightarrow Mg.\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\theta = I_A.\alpha_\gamma \Leftrightarrow Mg.\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{ML^2}{3}.\alpha_\gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{3g.\sigma\upsilon\nu\theta}{2L}$

Για φ=$60^0$ είναι θ=$30^0$ οπότε $\alpha_\gamma = 2\sqrt{3}rad/s^2$ και

$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = Mg\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\theta = 375\frac{\sqrt{3}}{2}N.m$

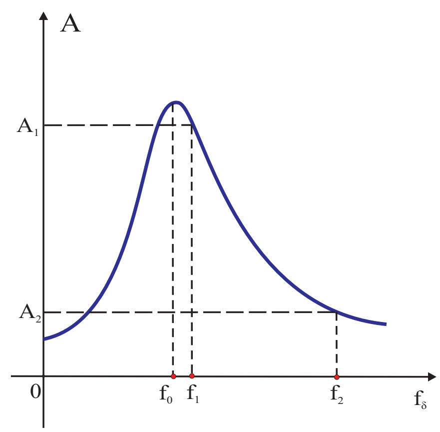
**2.γ.** Από Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση της ράβδου από τη θέση (Ι) έως στη θέση (ΙΙΙ) έχουμε: $\frac{1}{2}I_A\omega^2 = Mg\frac{L}{2} \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}.\omega^2 = Mg\frac{L}{2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = 3\sqrt{2}rad/s$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι: $\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau.\omega = 0$

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4**
**ΘΕΜΑ $1^0$**
**1.** γ
**2.** γ
**3.** β
**4.** γ
**5.** 1Σ, 2Σ , 3Σ , 4Λ, 5Λ
**ΘΕΜΑ $2^0$**
**1.** γ

$A_\Gamma = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{r_1 - r_2}{2\lambda}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{0,25\lambda}{2\lambda}\right| = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}A$

**2.** β. Η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή είναι $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{10}{\pi}Hz$ .




Έστω ότι για $f_1 = \frac{12}{\pi}Hz$ το πλάτος ταλάντωσης είναι $A_1$ και για

$f_2 = 2f_1 = \frac{24}{\pi}Hz$ το πλάτος είναι $A_2$.

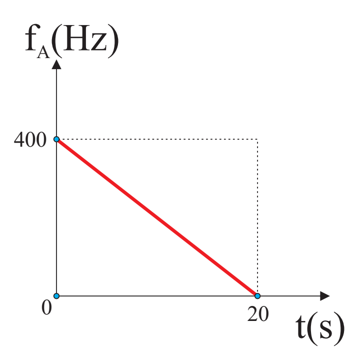
Από την καμπύλη συντονισμού έχουμε $A_1 > A_2$ . Άρα το πλάτος ταλάντωσης θα μειωθεί.
**3.** γ

Είναι $\frac{K_\mu}{K_\pi} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} = \frac{m\upsilon^2}{\frac{2}{5}mR^2\omega^2} = \frac{5}{2}\frac{\upsilon^2}{R^2\omega^2}$ .

Επειδή η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει υ=ω.R άρα $\frac{K_\mu}{K_\pi} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow K_\mu = 2,5K_\pi$ .

Όμως $K_\mu + K_\pi = 70j \Leftrightarrow 3,5.K_\pi = 70j \Leftrightarrow K_\pi = 20j$ οπότε και $K_\mu = 50j$ .

**4. i .** δ
Ο παρατηρητής παύει να αντιλαμβάνεται απευθείας τον ήχο της πηγής όταν $f_A$= 0 . Δηλαδή
$0 = \frac{\upsilon_{HX} - \upsilon_A}{\upsilon_{HX}}f_S \Leftrightarrow \upsilon_{HX} - \upsilon_A = 0 \Leftrightarrow \alpha.t = \upsilon_{HX} \Leftrightarrow t = 20s$ .




**ii .** Αν σε ένα χρονικό διάστημα dt το τύμπανο του αυτιού του παρατηρητή εκτελέσει dN ταλαντώσεις θα ισχύει: $f_A = \frac{dN}{dt} \Leftrightarrow dN = f_A.dt$ .

Ο συνολικός αριθμός ταλαντώσεων εκφράζεται από το εμβαδόν του διαγράμματος $f_A$=f(t). Άρα $N = E_{\tau\rho} = \frac{400.20}{2}\tau\alpha\lambda = 4000\tau\alpha\lambda$

**ΘΕΜΑ 3$^0$**

**α.** Η γενική εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι: $y = 2A\sigma\upsilon\nu(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t)\eta\mu(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t)$

Οπότε 2A=0,1m $\Leftrightarrow$ A=0,05m και $\frac{\omega_1-\omega_2}{2} = 2\pi \Leftrightarrow \omega_1-\omega_2 = 4\pi rad/s$ (1),

$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = 100\pi \Leftrightarrow \omega_1+\omega_2 = 200\pi rad/s$ (2)

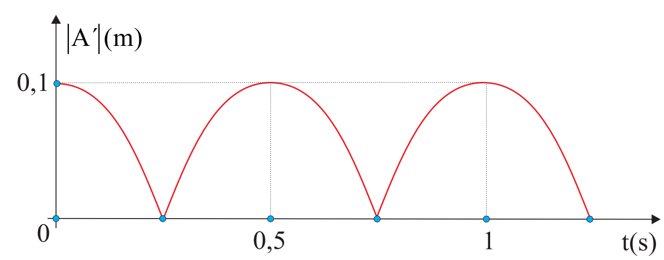
Από τις 1,2 παίρνουμε $\omega_1 = 102\pi rad/s$ και $\omega_2 = 98\pi rad/s$.

$y_1 = 0,05\eta\mu 102\pi t (S.I)$, $y_2 = 0,05\eta\mu 98\pi t (S.I)$.

**β.** Ο χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς μηδενισμούς (ή μεγιστοποιήσεις) του πλάτους είναι:
$T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|} = 0,5s$. Η εξίσωση του πλάτους σε συνάρτηση με το χρόνο είναι: $|A'| = 0,1|\sigma\upsilon\nu(2\pi t)| (S.I)$.

**γ.** $0,05 = 0,1|\sigma\upsilon\nu(2\pi t)| \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu(2\pi t)| = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(2\pi t) = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi t = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \eta' \\ 2\pi t = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$




$$\begin{cases} t = \kappa \pm \frac{1}{6} \\ \eta' \\ t = \kappa \pm \frac{1}{3} \end{cases}$$

για κ =0 έχουμε $t = \frac{1}{6}s$, $t = \frac{1}{3}s$.

**δ.** $\Delta t = 3.(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})s = 0,5s$

Η συχνότητα της σύνθετης ταλάντωσης είναι: $f = \frac{f_1+f_2}{2} = \frac{\omega_1+\omega_2}{4\pi} = 50Hz$.

Άρα $f = \frac{N}{\Delta t} \Leftrightarrow N = f.\Delta t = 25\tau\alpha\lambda$.

**ΘΕΜΑ 4$^0$**

**α.** Τη χρονική στιγμή t=2s έχουμε: $f = \frac{\upsilon+\upsilon_m}{\upsilon}f_s \Leftrightarrow \upsilon_m = \frac{\upsilon.f}{f_s} - \upsilon \Leftrightarrow \upsilon_m = 8m/s$.

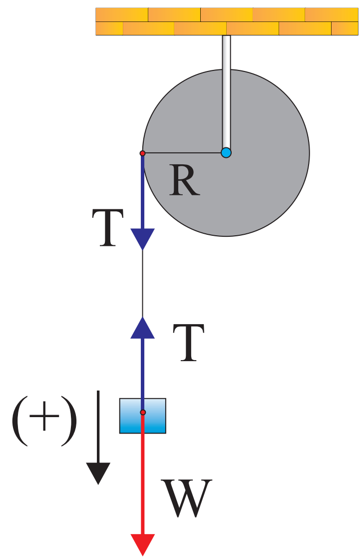
Όμως $\upsilon_m = \omega.R \Leftrightarrow \omega = \frac{\upsilon_m}{R} \Leftrightarrow \omega = 16rad/s$.

**β.** $\upsilon_m = \alpha_m \cdot t \Leftrightarrow \alpha_m = 4m/s^2$.

Για τη μεταφορική κίνηση του σώματος μάζας m έχουμε: $\Sigma F_x = m\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow T - W = m\cdot\alpha_{cm} \Rightarrow T - mg = m\cdot\alpha_m$ (1)

Για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας έχουμε: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_\gamma \Leftrightarrow T\cdot r = \frac{MR^2}{2}\alpha_\gamma \Leftrightarrow T = \frac{1}{2}MR\alpha_\gamma$ (2) και επειδή το νήμα δεν γλιστράει στη τροχαλία ισχύει: $\alpha_m = \alpha_\gamma \cdot R$ (3).

Από τις (1), (2), (3) παίρνουμε:




$$mg = m\alpha_m + \frac{1}{2}M\alpha_m \Leftrightarrow m = \frac{M\alpha_m}{2(g-\alpha_m)} = 2kg$$

γ. $\frac{dK_{\tau\rho}}{dt} = \Sigma\tau.\omega = I.\alpha_\gamma.\omega = \frac{1}{2}MR^2\frac{\alpha_m}{R}\omega = \frac{1}{2}M\alpha_m\upsilon_m = 96j/s$.

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5**
**ΘΕΜΑ 1$^0$**
**1.** β
**2.** γ
**3.** β
**4.** δ
**5.** 1Σ, 2Λ , 3Λ , 4Σ, 5Σ
**ΘΕΜΑ 2$^0$**
**1.** δ

Είναι $2A_K = 8cm \Leftrightarrow A_K = 4cm$ επίσης $\frac{T}{2} = 0,5s \Leftrightarrow T = 1s$ και λ=1m.

Άρα $y = 2A\sigma\upsilon\nu2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu2\pi\frac{t}{T} \Leftrightarrow y = A_K\sigma\upsilon\nu2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu2\pi\frac{t}{T} \Leftrightarrow y = 4.10^{-2}\sigma\upsilon\nu2\pi x\eta\mu2\pi t(S.I)$

**2.** γ

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi} \Leftrightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \frac{2E}{D} = \frac{2E_1}{D} + \frac{2E_2}{D} + 2\sqrt{\frac{2E_1}{D}}.\sqrt{\frac{2E_2}{D}}\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}.\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow E = 19j.$$

**3.** δ

Για το δίσκο ισχύει: $\Sigma F = 0 \Leftrightarrow F - W = 0 \Leftrightarrow F = Mg$ και $\Sigma\tau = I.\alpha_\gamma \Leftrightarrow F.R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{2F}{MR} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Sigma\tau = I.\alpha_\gamma \Leftrightarrow F.R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{2F}{MR} \Leftrightarrow \alpha_\gamma = \frac{2g}{R} = 200rad/s^2 \cdot$$

**4.** i γ Για τις ταχύτητες των $\Sigma_0$, $\Sigma_1$ μετά την κρούση τους έχουμε:

$$\upsilon_1 = \frac{2m_0}{m_0 + m_1}.\upsilon_0 = \upsilon_0 \text{ και } \upsilon_0{}' = \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1}.\upsilon_0 = 0$$

**ii** β Για τις ταχύτητες των $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ μετά την κρούση τους έχουμε: $\upsilon_1{}' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.\upsilon_1 = -\dfrac{\upsilon_1}{2} = -\dfrac{\upsilon_0}{2}$

και $\upsilon_2{}' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}.\upsilon_1 = \dfrac{\upsilon_1}{2} = \dfrac{\upsilon_0}{2}$

Για τη ταχύτητα του $\Sigma_0$ μετά τη δεύτερη κρούση με το $\Sigma_1$ κρούση έχουμε: $\upsilon_0{}' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_0}.(-\dfrac{\upsilon_1}{2}) = -\dfrac{\upsilon_0}{2}$

Άρα $\dfrac{|\upsilon_2{}'|}{|\upsilon_0{}'|} = 1$

**ΘΕΜΑ 3⁰**

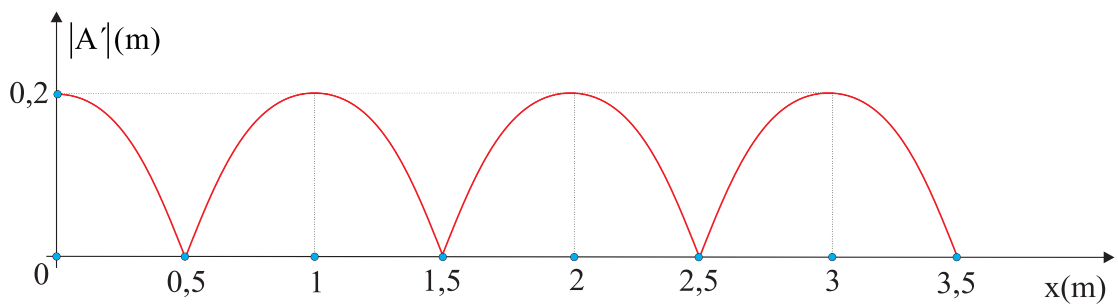
**α.** Η περίοδος της ταλάντωσης κάθε σημείου της χορδής είναι $T = 2.0,5s = 1s$. Το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας είναι $A_K = \dfrac{0,4}{2}m = 0,2m$.

.Για τις θέσεις των δεσμών στη χορδή ισχύει: $x = (2N+1)\dfrac{\lambda}{4}$

Το δεξί άκρο της χορδής είναι ο τέταρτος δεσμός (N=3) επομένως $L = (2.3+1)\dfrac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \lambda = 2m$.

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t}{T} \Leftrightarrow y = A_K\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{x}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t}{T} \Leftrightarrow y = 0,2\sigma\upsilon\nu\pi x\eta\mu 2\pi t (S.I)$$

**β.** Το πλάτος ταλάντωσης των υλικών σημείων είναι: $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right| = 0,2|\sigma\upsilon\nu\pi x|$ (S.I).




**γ.** Για το πλάτος ταλάντωσης των υλικών σημείων έχουμε:

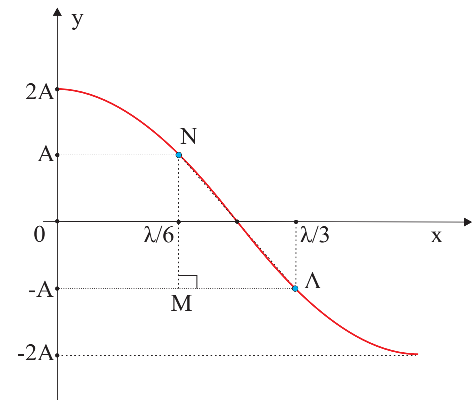
$$|A_1| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\lambda/6}{\lambda}\right| = A \text{ και } |A_2| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\lambda/3}{\lambda}\right| = A \text{ άρα } \frac{E_1}{E_2} = 1$$

Τα σημεία Ν και Λ που βρίσκονται στις θέσεις x=λ/6 και x = λ/3 αντίστοιχα έχουν διαφορά φάσης π rad.

$$y_N = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\lambda/6}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t}{T} \Leftrightarrow y_N = 0,1\eta\mu 2\pi t (S.I) \text{ και } y_\Lambda = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\frac{\lambda/3}{\lambda}\eta\mu 2\pi\frac{t}{T} \Leftrightarrow y_\Lambda = -0,1\eta\mu 2\pi t (S.I)$$

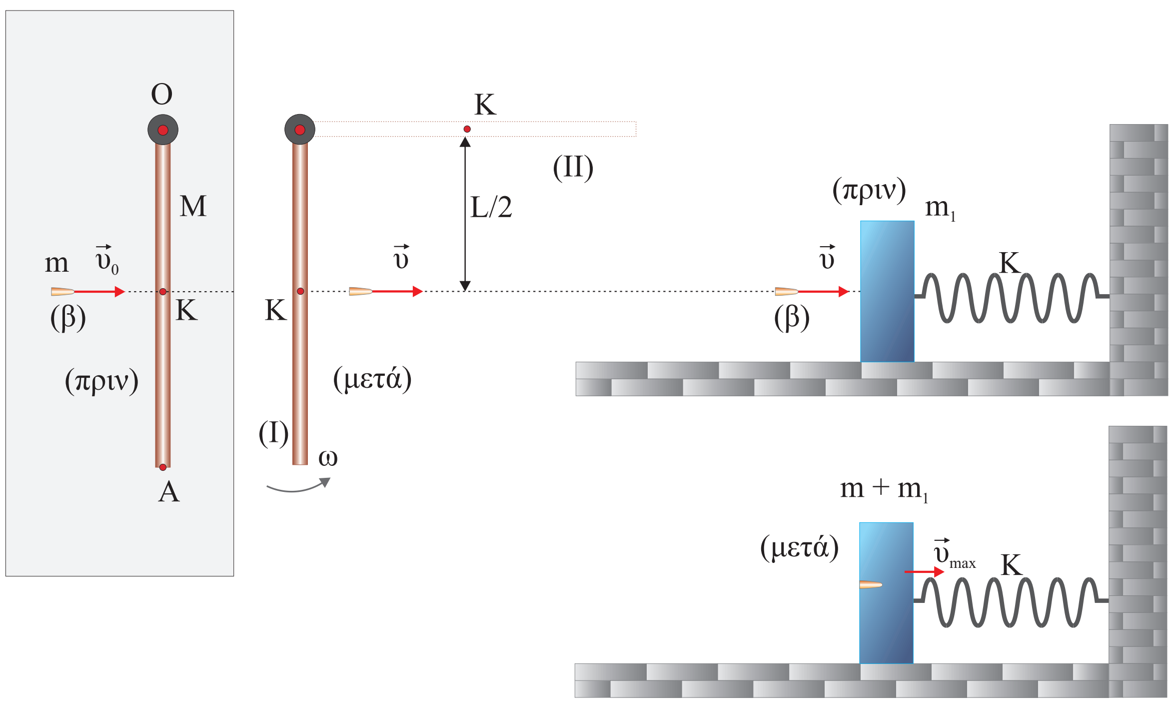
Επομένως όταν βρίσκονται σε ακραίες θέσεις θα έχουν κατακόρυφη απόσταση 2Α και οριζόντια λ/6. Άρα η μεταξύ τους απόσταση είναι

$$\Lambda N=\sqrt{\Lambda M^2+MN^2}=\sqrt{4A^2+\frac{\lambda^2}{36}}=\sqrt{\frac{136}{900}}m=\frac{2\sqrt{34}}{30}m=0,4m$$




**ΘΕΜΑ 4$^0$**

**1.** Το συσσωμάτωμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω=4rad/s και πλάτος $A=\frac{\upsilon_{max}}{\omega}=0,25m$. Άρα $\omega=\sqrt{\frac{K}{m+m_1}}\Leftrightarrow m=0,01kg$




**β.** Από Α.Δ.Ε ταλάντωσης έχουμε: $\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}Kx^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2\Leftrightarrow x=0,125m$. Άρα

$$\left|\frac{dp}{dt}\right|=|\Sigma F|=|-Dx|=|-Kx|=8N$$

**γ.** Από Α.Δ.Ο στη πλαστική κρούση έχουμε: $m.\upsilon=(m+m_1).\upsilon_{max}\Leftrightarrow\upsilon=400m/s$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα Ο είναι: $I_O = I_{cm} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3} = 0,09\text{kg.m}^2$

Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την κίνηση της ράβδου από τη θέση (Ι) στη θέση (ΙΙ) έχουμε:

$$0 - \frac{1}{2}I\omega^2 = -Mg\frac{L}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}\omega^2 = Mg\frac{L}{2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \Leftrightarrow \omega = 10\text{rad/s}$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής για την κρούση βλήματος – ράβδου ως προς τον άξονα Ο έχουμε:

$$m\upsilon_0\frac{L}{2} = I_O\omega + m\upsilon\frac{L}{2} \Leftrightarrow \upsilon_0 = 1000\text{m/s}$$

**δ.** Από Α.Δ.Ε έχουμε: $K_{\beta\lambda} - (K_{\rho\alpha\beta} + E_T) = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \left[\frac{1}{2}I_O\omega^2 + \frac{1}{2}(m+m_1)\upsilon_{max}^2\right] = 4993,5\text{j}$

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6**

**ΘΕΜΑ 1$^0$**

**1.** α
**2.** α
**3.** β
**4.** γ
**5.** 1Λ, 2Λ , 3Σ , 4Λ, 5Λ

**ΘΕΜΑ 2$^0$**

**1.** γ

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow A_1 = 5\text{cm}.$$

**2.** β
Η συχνότητα δεν αλλάζει με την αλλαγή του μέσου διάδοσης αφού καθορίζεται από τη συχνότητα τη συχνότητα της πηγής. Άρα f = 1Hz.
**3.** γ

**4. β** Είναι $K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2$ και $K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$ όμως

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}.\upsilon_1 = \frac{\upsilon_1}{2} \text{ οπότε } K_2' = \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}3m_1\frac{\upsilon_1^2}{4} = \frac{3}{4}K_1$$

**ΘΕΜΑ 3$^0$**

**1α.** Είναι x = A ημ(ωt+$\varphi_0$) όπου $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10\text{rad/s}$.
Για t = 0 είναι $x = -A$ οπότε αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε: $-A = A\eta\mu\varphi_0 \Leftrightarrow \eta\mu\varphi_0 = -1 \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\text{rad}$

Από Α.Δ.Ε ταλάντωσης όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση Μ έχουμε: $\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Leftrightarrow A = 0,2\text{m}$

Άρα $x = A\,\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow x = 0,2.\eta\mu(10t + \frac{3\pi}{2})(\text{S.I})$.

**2α.** Είναι $\Delta t = t_{B\Gamma} - t_{BM} = \frac{T}{2} - t_{BM}$ με $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5}s$

Για $t = t_{BM}$ είναι x=0,1m άρα $0,1 = 0,2\eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2}) \Leftrightarrow \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

$$\begin{cases} \omega t + \frac{3\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \eta' \\ \omega t + \frac{3\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi - \frac{4\pi}{3} \\ \eta' \\ \frac{2\pi}{T} t = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = (\kappa - \frac{2}{3})T \\ \eta' \\ t = (\kappa - \frac{1}{3})T \end{cases}$$

για κ=1 η πρώτη σειρά λύσεων δίνει: $t_{B\Gamma} = \frac{T}{3}$. Άρα $\Delta t == \frac{T}{2} - \frac{T}{3} = \frac{T}{6} = \frac{\pi}{30}s$

**2α.**Το έργο της δύναμης απόσβεσης είναι ίσο με τη μεταβολή της ενέργειας ταλάντωσης του συστήματος.

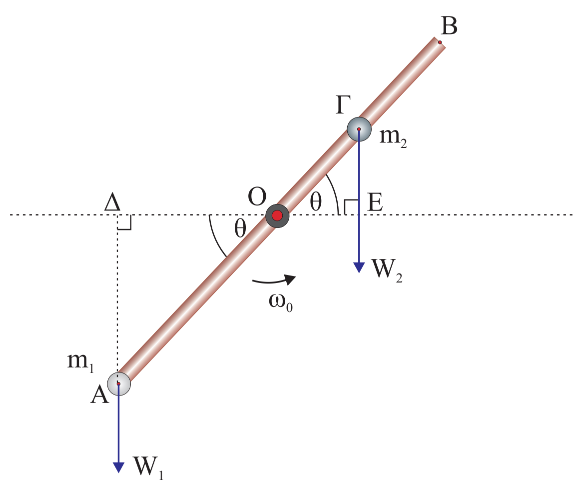
$W_F = \Delta E \Leftrightarrow W_F = E_1 - E_0 \Leftrightarrow W_F = \frac{1}{2}KA_1^2 - \frac{1}{2}KA_0^2$ με $A_0$=0,2m και

$A_1$=$A_0$-20%$A_0$=0,8$A_0$. οπότε $W_F = \frac{1}{2}K0,64A_0^2 - \frac{1}{2}KA_0^2 = -0,36\frac{1}{2}KA_0^2 = -0,18KA_0^2 = -0,72j$

**2β.** Ισχύει $\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow A_2 = 0,64A_0 \Leftrightarrow A_2 = 0,128m$ οπότε $E_2 = \frac{1}{2}KA_2^2 = \frac{1}{2}100.0,128^2 j = 0,8192j$

**ΘΕΜΑ 4⁰**

**1**. Το σύστημα ράβδος-σημειακές μάζες εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το Ο.




Άρα σε κάθε θέση ισχύει: (στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια τυχαία θέση).

$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Leftrightarrow m_1g.(\Delta O) - m_2g(OE) = 0 \Leftrightarrow m_1g.(AO)\sigma\upsilon\nu\theta - m_2g(O\Gamma)\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Leftrightarrow m_2 = \frac{m_1OA}{O\Gamma} \Leftrightarrow m_2 = 1,5kg$$

**2 α.** Από Θ.Μ.Κ.Ε για τη κατακόρυφη κίνηση της μάζας $m_2$ έχουμε:

$$0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_0^2 = -m_2gh \Leftrightarrow \upsilon_0 = \sqrt{2gh} \Leftrightarrow \upsilon_0 = 2m/s.$$

Όμως τη στιγμή της αποκόλλησης η μάζα $m_2$ έχει γραμμική ταχύτητα $\upsilon_0$ οπότε $\upsilon_0 = \omega_0(O\Gamma) \Rightarrow \omega_0 = 1rad/s$

**2 β.** Η ροπή αδράνειας του συστήματος ράβδος –μάζα $m_1$ είναι: $I = I_{cm} + m_1(OA)^2 = \frac{ML^2}{12} + m_1(OA)^2 = 15kg.m^2$ .

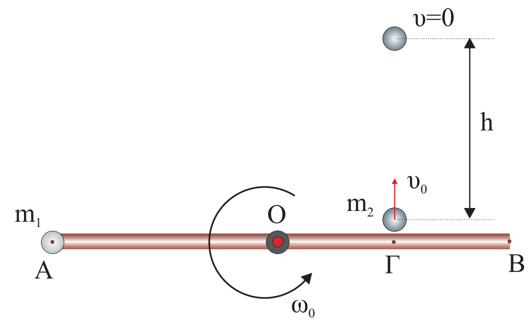
άρα $\underset{(O)}{\Sigma\tau} = I.\alpha_\gamma \Leftrightarrow m_1 g.(OA) = I.\alpha_\gamma \Leftrightarrow \alpha_\gamma = 2rad/s^2$

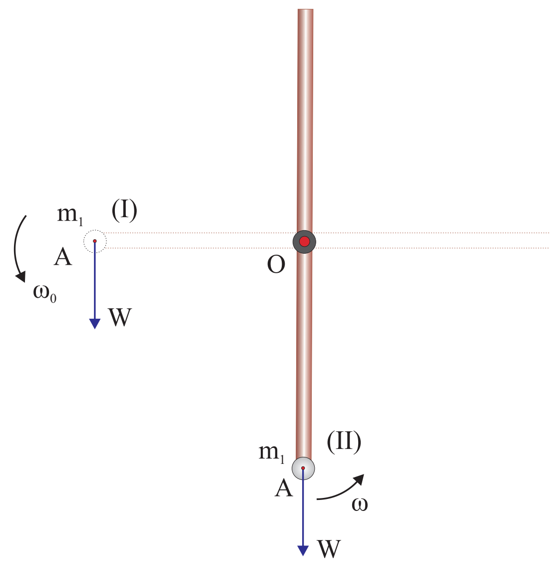
οπότε είναι $\frac{d\omega}{dt} = 2rad/s^2$ .

**2 γ**. Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, ανάμεσα στις θέσεις (Ι) και (ΙΙ) ,για το σύστημα ράβδος-μάζα $m_1$ έχουμε:

$\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = m_5 g(OA) \Leftrightarrow \omega = \sqrt{5}rad/s$ οπότε

και $L_\rho = I_\rho . \omega = 6\sqrt{5}$ kg.m²/s




## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

### ΘΕΜΑ 1$^0$

**1.** β
**2.** δ
**3.** δ
**4.** α
**5.** 1Λ, 2Λ , 3Λ , 4Σ, 5Λ

### ΘΕΜΑ 2$^0$

**1.** β

Έστω ότι $f_1 > f_2$ οπότε $T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \Leftrightarrow T_\delta = \frac{1}{f_1 - f_2} \Leftrightarrow f_1 - f_2 = 1Hz$ (1)

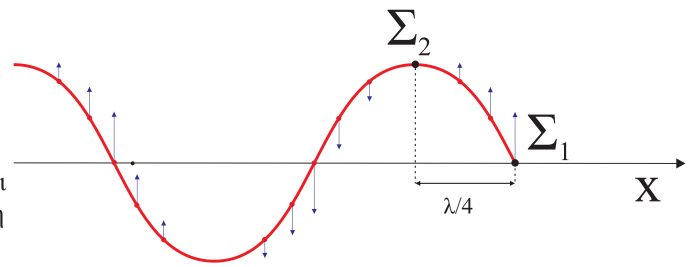
Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι $f = \frac{N}{t} \Leftrightarrow \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{N}{t} \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 100Hz$ (2).

Από τις 1,2 παίρνουμε $f_1$=51Hz και $f_2$=49Hz.

**2**.α

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το στιγμιότυπο του κύματος όταν ξεκινά ταλάντωση το υλικό σημείο $\Sigma_1$.

Την ίδια στιγμή το υλικό σημείο $\Sigma_2$ βρίσκεται στην άνω ακραία θέση της ταλάντωσης του και είναι στιγμιαία ακίνητο. Η οριζόντια απόσταση των δύο σημείων είναι λ/4.




**3**.γ

Αρχικά η ροπή αδράνειας του άστρου είναι $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$ ενώ στα τελευταία στάδια της ζωής του είναι $I = \frac{2}{5}M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \Leftrightarrow I = \frac{2}{5}M\frac{R^2}{4} \Leftrightarrow I = \frac{I_0}{4}$.

Η στροφορμή του άστρου διατηρείται σταθερή άρα $L_0 = L \Leftrightarrow I_0\omega = I.\omega \Leftrightarrow I_0\omega = \frac{I_0}{4}.\omega \Leftrightarrow \omega = 4.\omega_0$.

Αρχικά η κινητική ενέργεια του άστρου είναι $K_0 = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2$ ενώ στα τελευταία στάδια της ζωής

του είναι $K = \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}\frac{I_0}{4}(4\omega_0)^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}I_0 4\omega_0{}^2 \Leftrightarrow K = 4K_0$

**4.**α Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής πριν την κρούση είναι:

$$f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s}f_s \Leftrightarrow f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon/3}f_s \Leftrightarrow f_A = \frac{3}{4}f_s \quad (1)$$

Από Α.Δ.Ο έχουμε: $m\upsilon_0 = 5mV \Leftrightarrow V = \frac{\upsilon_0}{5} \Leftrightarrow V = \frac{\upsilon_0}{15}$

Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής μετά την κρούση είναι:

$$f_A{}' = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_s{}'}f_s \Leftrightarrow f_A{}' = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon/15}f_s \Leftrightarrow f_A{}' = \frac{15}{16}f_s \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις 1,2 παίρνουμε: $\frac{f_A{}'}{f_A} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow f_A{}' = \frac{5}{4}f_A$.

**ΘΕΜΑ 3$^0$**

α. Το υλικό σημείο Ο έχει για πρώτη φορά μέγιστη θετική απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t = \frac{T}{4}$ και το κύμα έχει διαδοθεί κατά λ/4. Άρα $x_K = \frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow \lambda = 8m$.

Είναι $\Delta\varphi = \omega.\Delta t \Leftrightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}.\Delta t \Leftrightarrow T = 2s$ και $\upsilon_\delta = \frac{\lambda}{T} \Leftrightarrow \upsilon_\delta = 4m/s$.

β. Θέτοντας $\varphi = 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ για τη φάση ενός υλικού σημείου έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y = A\eta\mu\varphi \Leftrightarrow \eta\mu^2\varphi = \frac{y^2}{A^2} \\ \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{\upsilon^2}{\omega^2A^2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi = \frac{y^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2A^2} \Leftrightarrow A^2 = y^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow A^2 = y^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2}.$$

Για $y = \frac{\sqrt{3}}{2}A$ και υ=0,2π m/s παίρνουμε: $A^2 = \frac{3A^2}{4} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} \Leftrightarrow A^2 = 4\frac{\upsilon^2}{\omega^2} \Leftrightarrow A = 2\frac{\upsilon}{\omega} \Leftrightarrow A = 0,4m$

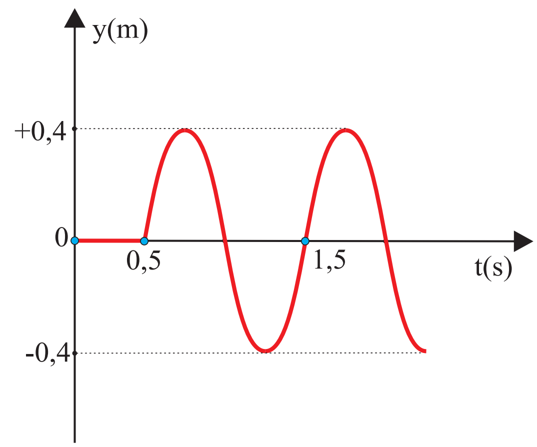
Η εξίσωση του κύματος είναι $y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) \Leftrightarrow y = 0,4.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{x}{8})$ (S.I)

γ. Το υλικό σημείο Κ ξεκινά να κάνει ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t_K = \frac{x_K}{\upsilon_\delta} = 0,5s$

Άρα για $t < 0,5s$ είναι: $y_K=0$

και για $t \geq t_K$ είναι:

$$y_K = 0,4.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{2}{8}) \Leftrightarrow y_K = 0,4.\eta\mu 2\pi(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}) \text{ (S.I).}$$




**δ.** Το κύμα διαδίδεται για χρόνο $t = 16T + \frac{T}{4} = 32,5s$

ενώ στο σημείο Μ το κύμα φθάνει τη χρονική στιγμή

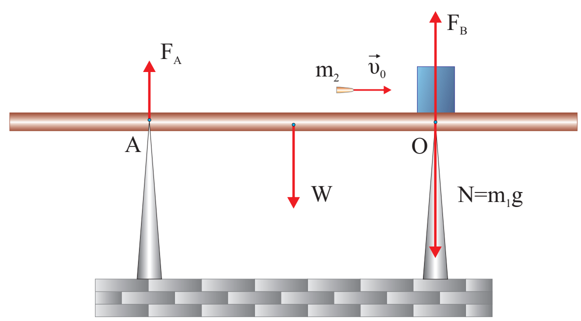
$t_M = \frac{x_M}{\upsilon_\delta} = 3s$ . Άρα

$$y_M = 0,4.\eta\mu 2\pi(\frac{32,5}{2} - \frac{12}{8}) \Leftrightarrow y_M = 0,4.\eta\mu\frac{59\pi}{2}m \Leftrightarrow y_M = 0,4.\eta\mu(28\pi + \frac{3\pi}{2})m \Leftrightarrow y_M = -0,4m$$

**ΘΕΜΑ 4ο**

**α.** Από την ισορροπία της δοκού έχουμε:

$$\underset{(O)}{\Sigma\tau} = 0 \Leftrightarrow F_A.\frac{\ell}{2} - W.\frac{\ell}{4} = 0 \Leftrightarrow F_A = \frac{W}{2} \Leftrightarrow F_A = 20N$$




**β.** Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$m_2\upsilon_0 = (m_1 + m_2)V \Leftrightarrow V = \frac{m_2\upsilon_0}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow V = 5m/s .$$

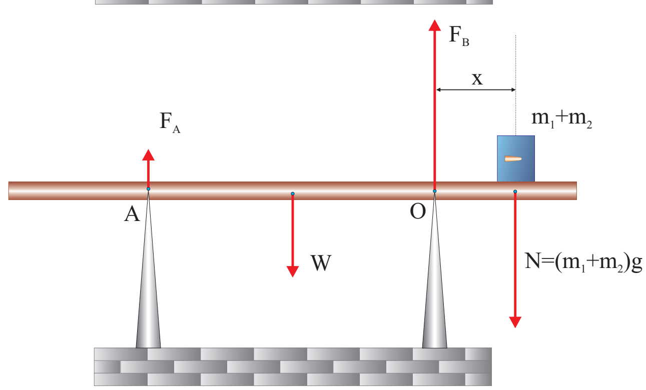
$$K_{\pi\rho\iota\nu} = \frac{1}{2}m_2\upsilon_0^2 = 450j \text{ και } K_{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2}m_2V^2 = 12,5j$$

Άρα $\frac{|\Delta K|}{K_{\pi\rho\iota\nu}}.100\% = 97,2\%$

**γ.** Κατά τη διάρκεια της κίνησης του συσσωματώματος έχουμε:

$$\underset{(O)}{\Sigma\tau} = 0 \Leftrightarrow -F_A.\frac{\ell}{2} + W.\frac{\ell}{4} - (m_1 + m_2)g.x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6.F_A - 120 + 60.x = 0 \Leftrightarrow F_A = 20 - 10.x \text{ (S.I).}$$




Όταν η δοκός έχει επαφή με το στήριγμα ΑΛ ισχύει:

$$F_A \geq 0 \Leftrightarrow 20 - 10.x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2m$$

Κατά συνέπεια η μέγιστη απόσταση που μπορεί να διανύσει το συσσωμάτωμα πάνω στη δοκό ώστε να μη χαθεί η επαφή με το στήριγμα ΑΛ είναι $x_{max}$=2m.

Από Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση του συσσωματώματος έχουμε:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_T \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = -\mu(m_1 + m_2)g.x_{max} \Leftrightarrow \mu = \frac{V^2}{2g.x_{max}} \Leftrightarrow \mu = \frac{5}{8} .$$

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8**
**ΘΕΜΑ 1$^0$**
**1.** γ
**2.** γ
**3.** δ
**4.** β
**5.** 1Λ, 2Λ , 3Σ , 4Σ, 5Σ
**ΘΕΜΑ 2$^0$**
**1. β**. Είναι $D_A = \frac{2F}{A/2} = \frac{4F}{A}$ και $D_B = \frac{F}{A}$ άρα $D_A = 4.D_B$

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\frac{1}{2}D_A(\frac{A}{2})^2}{\frac{1}{2}D_B A^2} = \frac{D_A\frac{A^2}{4}}{D_B A^2} = \frac{4D_B\frac{A^2}{4}}{D_B A^2} = 1\,.$$

**2.** i. Για τις ενέργειες των κυκλωμάτων έχουμε: $E_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1}$ και $E_2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2}$
είναι $C_1 > C_2$ άρα και $E_1 < E_2$ .

ii. Για τους χρόνους εκφόρτισης των κυκλωμάτων έχουμε: $\Delta t_1 = \frac{T_1}{4} \Leftrightarrow \Delta t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{L.C_1}$ και

$\Delta t_2 = \frac{T_2}{4} \Leftrightarrow \Delta t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{L.C_2}$ . Είναι $C_1 > C_2$ άρα και $\Delta t_1 > \Delta t_2$ .

**3. γ**

Ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Α έχουμε: $I_A = I_{cm} + M\frac{L^2}{4} = M\frac{L^2}{12} + M\frac{L^2}{4} = M\frac{L^2}{3}$ .

$\underset{(A)}{\Sigma\tau} = I_A.\alpha_A \Leftrightarrow F.L = M\frac{L^2}{3}.\alpha_A \Leftrightarrow \alpha_A = \frac{3F}{ML}$ .(1)

Ως προς τον άξονα που διέρχεται από το Β έχουμε: $I_B = M\frac{L^2}{12}$ .

$\underset{(B)}{\Sigma\tau} = I_B.\alpha_B \Leftrightarrow F.\frac{L}{2} = M\frac{L^2}{12}.\alpha_B \Leftrightarrow \alpha_B = \frac{6F}{ML}$ .(2).

Από τις 1,2 παίρνουμε: $\alpha_B = 2.\alpha_A \Leftrightarrow .\alpha_A = \frac{\alpha_B}{2}$ .

**4. α** Από την αρχή διατήρησης της ορμής στην κρούση έχουμε: $m_1\upsilon = (m_1 + m_2)V \Leftrightarrow V = \frac{m_1\upsilon}{m_1 + m_2}$

Για το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας έχουμε:

$$\frac{|\Delta K|}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{\frac{1}{2}m_1\upsilon^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon^2}100\% = (1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1\upsilon}{m_1+m_2}\right)^2}{\frac{1}{2}m_1\upsilon^2})100\% = (1 - \frac{m_1}{m_1+m_2})100\% =$$

$$= \frac{m_2}{m_1+m_2}100\% = \frac{1}{\lambda+1}100\%$$

Το πιο πάνω ποσοστό γίνεται μέγιστο για $\lambda \to 0$.( η μάζα $m_1$ είναι πολύ μικρότερη της $m_2$.)

**ΘΕΜΑ 3$^0$**
**α.** Λόγω ισορροπίας της σκάλας έχουμε:

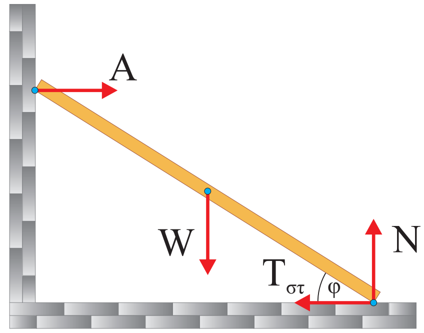
$$\underset{(O)}{\Sigma\tau} = 0 \Leftrightarrow W\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - AL\eta\mu\varphi = 0 \Leftrightarrow A = \frac{W}{2\varepsilon\varphi\varphi} \Leftrightarrow A = 100\sqrt{3}N\,.$$

**β**. Ακόμα ισχύει:

$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow A - T_{\sigma\tau} = 0 \Leftrightarrow T_{\sigma\tau} = A = 100\sqrt{3}N$ .

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - W = 0 \Leftrightarrow N = W = 200N$ .

Άρα $F = \sqrt{N^2 + T_{\sigma\tau}^2} = 100\sqrt{7}N$ και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{N}{T_{\sigma\tau}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .




**γ**. Για να μην γλιστράει η σκάλα πρέπει να ισχύει : $T_{\sigma\tau} \le \mu_\varsigma .N$ (1)

$\Sigma F_x = 0 \Leftrightarrow A - T_{\sigma\tau} = 0 \Leftrightarrow T_{\sigma\tau} = A$ .(2)

$\Sigma F_y = 0 \Leftrightarrow N - (W + W_1) = 0 \Leftrightarrow N = W + W_1 = 1000N$ .(3)

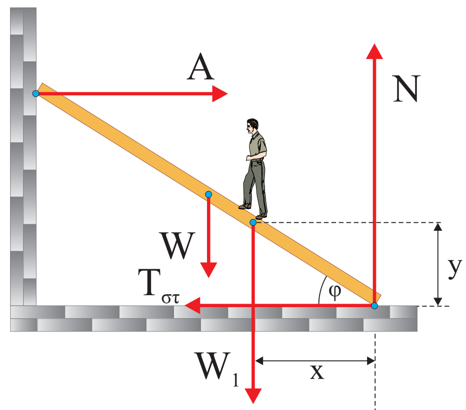
$\underset{(O)}{\Sigma\tau} = 0 \Leftrightarrow W\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - AL\eta\mu\varphi + W_1 x = 0 \Leftrightarrow A = \frac{W}{\varepsilon\varphi\varphi} + \frac{W_1 x}{L\eta\mu\varphi}$ .

Άρα από τη σχέση (2) είναι $T_{\sigma\tau} = \frac{W}{\varepsilon\varphi\varphi} + \frac{W_1 x}{L\eta\mu\varphi}$ οπότε από την (1) έχουμε:

$\frac{W}{\varepsilon\varphi\varphi} + \frac{W_1 x}{L\eta\mu\varphi} \le \mu_\varsigma .N \Leftrightarrow x \le \frac{\mu_\varsigma .N.L.\eta\mu\varphi}{W_1} - \frac{W.L.\sigma\upsilon\nu\varphi}{W_1} \Leftrightarrow x \le \frac{3\sqrt{3}}{2}m$ .

Άρα $x_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}m$ .

Όμως $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y_{max} = x_{max}.\varepsilon\varphi\varphi \Leftrightarrow y_{max} = 1,5m$.




**ΘΕΜΑ 4ο**

**α.** Επειδή $f_A > f_S$ ο δέκτης πλησιάζει προς την πηγή , οπότε:

$f_A = \frac{\upsilon + |\upsilon_A|}{\upsilon} f_s \Leftrightarrow |\upsilon_A| = \upsilon(\frac{f_A}{f_s} - 1) \Leftrightarrow |\upsilon_A| = 4m/s \Leftrightarrow \upsilon_A = 4m/s$ .

**β.** Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης είναι $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 10rad/s$ .

Η συχνότητα που καταγράφει ο δέκτης αρχικά αυξάνεται άρα κινούμενος προς τα δεξιά πλησιάζει προς τη θέση ισορροπίας του. Δηλαδή τη χρονική στιγμή t=0 έχει υ=4m/s και x<0.

$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow 4 = 10.0,8.\sigma\upsilon\nu\varphi_0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi_0 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$ .

$\varphi_0 = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}$. Τελικά παίρνουμε $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}rad$ ή $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}rad$ . Όμως $x < 0 \Leftrightarrow A\eta\mu\varphi_0 < 0 \Leftrightarrow \eta\mu\varphi_0 < 0$ .

Δεκτή είναι η λύση $\varphi_0 = \frac{5\pi}{3}rad$ . Άρα $x = 0,8\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3})$ (S.I).

**γ**. Η ταχύτητα του δέκτη ( άρα και η συχνότητα που καταγράφει) αυξάνεται μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1$ που αυτός διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του. Άρα

$$x = 0,8\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3}) \Leftrightarrow 0 = 0,8\eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3}) \Leftrightarrow \eta\mu(10t + \frac{5\pi}{3}) = 0 \Leftrightarrow 10t + \frac{5\pi}{3} = \kappa\pi \ .$$

Η μικρότερη θετική τιμή που δίνει η πιο πάνω εξίσωση (για κ = 2) είναι $t = \frac{\pi}{30} s$ .

**δ**. Για $f_A = f_S$ είναι $\upsilon_A = 0$ . Η ταχύτητα του δέκτη μηδενίζεται για πρώτη φορά στη θέση x=+A.

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha = -\omega^2.A = -80 m/s^2$$

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9**
**ΘΕΜΑ 1$^0$**
**1.** δ
**2.** α
**3.** α
**4.** γ
**5.** 1Λ, 2Σ , 3Σ , 4Λ, 5Σ

**ΘΕΜΑ 2$^0$**
**1. α** Η ταχύτητα του σώματος $\Sigma_1$ τη στιγμή της κρούσης είναι: $\upsilon = \omega_1.A_1 \Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{K}{m_1}}.A_1$ .

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$m_1\upsilon = (m_1 + m_2)V \Leftrightarrow V = \frac{m_1\upsilon}{m_1 + m_2}$ . Όμως

$$V = \omega_2.A_2 \Leftrightarrow V = \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}}.A_2 \Leftrightarrow V = \sqrt{\frac{K}{m_1 + 3.m_1}}.A_2 \Leftrightarrow V = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{m_1}}.A_2$$

Οπότε $V = \frac{m_1\upsilon}{m_1 + m_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{m_1}}.A_2 = \frac{m_1.\sqrt{\frac{K}{m_1}}.A_1}{4.m_1} \Leftrightarrow A_2 = \frac{1}{2}.A_1$

**2.γ**
Επειδή $f = 2f_0$ είναι και $\omega = 2\omega_0$ άρα $K = \frac{1}{2}I\omega^2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}I4\omega_0^2 \Leftrightarrow K = 4K_0$ .

Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας στη στροφική κίνηση έχουμε:
$K - K_0 = W_F \Leftrightarrow W_F = 3.K_0$ .

**3.β,γ**
Τη χρονική στιγμή $t_1$ τα κύματα έχουν διαδοθεί κατά την ίδια απόσταση $x_1$. Άρα $\upsilon_A = \upsilon_B$.

Τη χρονική στιγμή $t_1$για x=0 είναι: $\varphi_A = 2\varphi_B \Leftrightarrow 2\pi\frac{t_1}{T_A} = 2.2\pi\frac{t_1}{T_B} \Leftrightarrow T_B = 2.T_A \Leftrightarrow \frac{\lambda_B}{\upsilon_B} = 2.\frac{\lambda_A}{\upsilon_A} \Leftrightarrow \lambda_A = \frac{\lambda_B}{2}$ .

**4.δ**
Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε: $\vec{p} + \vec{p} = \vec{p}_{\sigma\upsilon\sigma}$ .

Η ορμή του συστήματος πριν τη κρούση έχει μέτρο $p_{o\lambda} = \sqrt{p^2 + p^2} \Leftrightarrow p_{o\lambda} = \sqrt{2p^2} \Leftrightarrow p_{o\lambda} = \sqrt{2}p$ .

Άρα $p_{συσ} = \sqrt{2}p$ .

**ΘΕΜΑ 3[0]**

**α.** Είναι $υ_δ = \frac{λ}{T} \Leftrightarrow T = \frac{λ}{υ_δ} \Leftrightarrow T = 2s.$

Το υλικό σημείο Μ είναι σημείο ενίσχυσης ( $r_1 - r_2 = 0.λ$ ). Άρα 2Α=0,2m $\Leftrightarrow A = 0,1m$ .

β. Επειδή το σημείο Δ είναι το δεύτερο σημείο απόσβεσης στ' αριστερά του μέσου Μ θα ισχύει:

$r_1 - r_2 = (2N+1).\frac{λ}{2}$ με N=-2

Οπότε $r_1 - r_2 = (-4+1).\frac{λ}{2} \Leftrightarrow r_1 - r_2 = -3.\frac{λ}{2} \Leftrightarrow r_2 = r_1 + 3.\frac{λ}{2} \Leftrightarrow r_2 = 75cm.$

γ. Στο σημείο Δ τα κύματα φθάνουν από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ τις χρονικές στιγμές $t_1 = \frac{r_1}{υ_δ} = 4,5s$ και

$t_2 = \frac{r_2}{υ_δ} = 7,5s$ αντίστοιχα.

Για $0 \le t < 4,5s$ είναι $y_Δ$=0.

Για $4,5s \le t < 7,5s$ είναι $y_Δ = 0,1.ημ(πt - \frac{9π}{2})$ (S.I).

Για $7,5s \le t \le 8s$ είναι $y_Δ = 0$ .

δ. Έστω x η απόσταση των κοντινότερων σημείων ενίσχυσης από τις δύο πηγές. Επειδή δύο διαδοχικά σημεία ενίσχυσης του τμήματος $Π_1Π_2$ απέχουν κατά λ/2 θα ισχύει:

$0 \le x < \frac{λ}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{d-3λ}{2} < \frac{λ}{2} \Leftrightarrow 0 \le d - 3λ < λ \Leftrightarrow 0 \le d - 3\frac{υ_δ}{f} < \frac{υ_δ}{f} \Leftrightarrow 0 \le df - 3υ_δ < υ_δ \Leftrightarrow \frac{3υ_δ}{d} \le f < \frac{4υ_δ}{d}$ . Άρα

$\frac{1}{4}Hz \le f < \frac{1}{3}Hz$ , τελικά $f_{min}$=0,25Hz.

**ΘΕΜΑ 4[0]**

**α.** Πριν κοπεί το νήμα η σφαίρα Λ ισορροπούσε, οπότε έχουμε:

$ΣF_X = 0 \Leftrightarrow W_X = T + T_{στ}$ (1)

$ΣF_y = 0 \Leftrightarrow W_y = N$ (2)

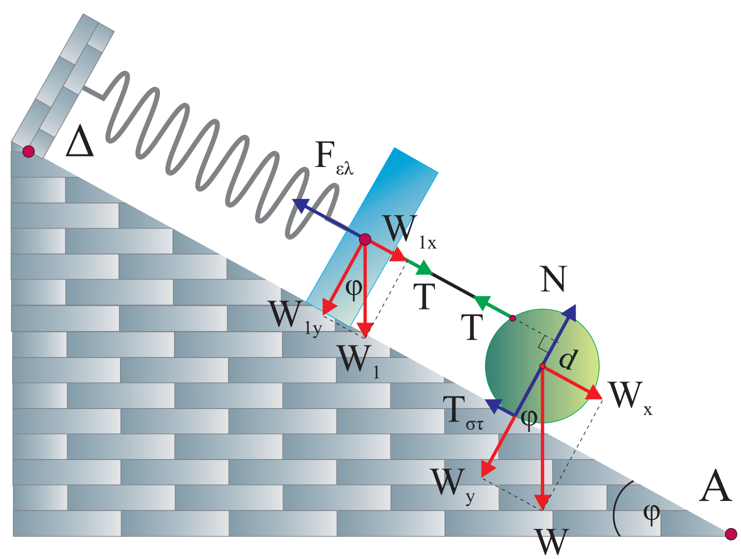
$\underset{(K)}{Στ} = 0 \Leftrightarrow T.d - T_{στ}.R = 0 \Leftrightarrow T = 2T_{στ}$ (3)

Η (1) από (3) γίνεται:

$Mgημφ = 3T_{στ} \Leftrightarrow T_{στ} = 10N$ .

**β**. Πριν κοπεί το νήμα το σώμα (Σ) ισορροπούσε , οπότε έχουμε:

$ΣF_X = 0 \Leftrightarrow W_{1,X} + T = F_{ελ} \Leftrightarrow T = F_{ελ} - W_{1,X}$

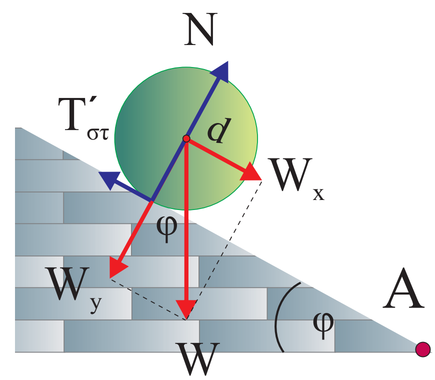



Όταν κόβεται το νήμα το σώμα ξεκινά απλή αρμονική ταλάντωση από ακραία θέση (υ=0) . Στη θέση αυτή το σώμα δέχεται δύναμη επαναφοράς μέγιστου μέτρου

$$\Sigma F = DA \Leftrightarrow F_{\varepsilon\lambda} - W_{1,X} = KA \Leftrightarrow T = KA \Leftrightarrow A = \frac{T}{K} \Leftrightarrow A = 0,08\text{m}.$$

**γ.** Μετά το κόψιμο του νήματος η σφαίρα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση (με $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ ).

Άρα είναι : $\Sigma F_X = M\alpha_{cm} \Leftrightarrow Mg\eta\mu\varphi - T_{\sigma\tau}' = M\alpha_{cm}$ (1)




και

$$\underset{(K)}{\Sigma\tau} = I.\alpha_\gamma \Leftrightarrow T_{\sigma\tau}'.R = \frac{2}{5}MR^2\alpha_\gamma \Leftrightarrow T_{\sigma\tau}' = \frac{2}{5}MR\alpha_\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_{\sigma\tau}' = \frac{2}{5}M\alpha_{cm} (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) παίρνουμε:

$Mg\eta\mu\varphi = \frac{7}{5}M\alpha_{cm} \Leftrightarrow \alpha_{cm} = \frac{5}{7}g\eta\mu\varphi \Leftrightarrow \alpha_{cm} = \frac{25}{7}\text{m/s}^2$. Άρα

$\alpha_\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R} = 25\text{rad/s}^2$ .

Όταν η σφαίρα έχει διαγράψει $\frac{25}{\pi}$ περιστροφές έχει διαγράψει γωνία Δθ=Ν.2π=50rad.

Όμως $\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2\Delta\theta}{\alpha_\gamma}} \Leftrightarrow t = 2\text{s}$ .

Στο χρόνο αυτό το σώμα (Σ) έχει εκτελέσει 5 ταλαντώσεις. Άρα $t = 5T \Leftrightarrow t = 10\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Leftrightarrow m = \frac{Kt^2}{100\pi^2} \Leftrightarrow m = 1\text{kg}$ .

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10**

**ΘΕΜΑ 1$^0$**

**1. δ**
**2. α**
**3. γ**
**4. β**
**5.** 1Σ, 2Λ , 3Λ , 4Λ, 5Σ

**ΘΕΜΑ 2$^0$**

**1. β**

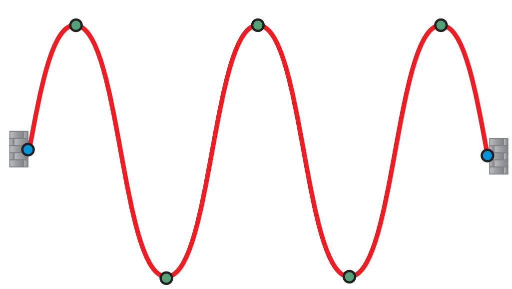
είναι $A = |A_1 - A_2| = 4\text{m}$ και $\theta = \pi\text{rad}$ αφού $A_2>A_1$. Άρα x=4.ημ(20t+π) (S.I).

**2. γ** Πριν είναι: $f_A = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_S}f_s$ . Μετά είναι: $f_A' = \frac{\upsilon}{\upsilon + \upsilon_S}f_s$. Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{f_A}{f_A'} = \frac{\upsilon + \upsilon_S}{\upsilon - \upsilon_S} \Leftrightarrow \frac{\upsilon + \upsilon_S}{\upsilon - \upsilon_S} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \upsilon_S = \frac{\upsilon}{9}$$

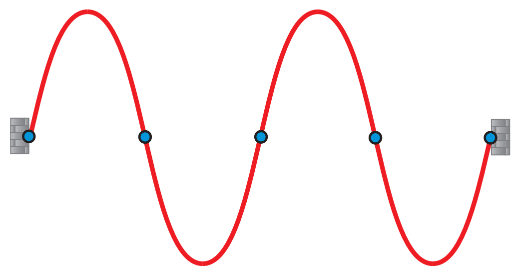
**3. α**

Για $f = f_1$ το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Τότε $L = \frac{5}{2}\lambda_1 \Leftrightarrow L = \frac{5}{2}\frac{\upsilon_\delta}{f_1} \Leftrightarrow f_1 = \frac{5}{2}\frac{\upsilon_\delta}{L}$

Για $f = f_2$ το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Τότε $L = 2\lambda_2 \Leftrightarrow L = 2\dfrac{\upsilon_\delta}{f_2} \Leftrightarrow f_2 = 2\dfrac{\upsilon_\delta}{L}$ . Άρα $\dfrac{f_1}{f_2} = \dfrac{5}{4}$

**4.α**

Η κούφια σφαίρα έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από τη συμπαγή επειδή ίση μάζα κατανέμεται σε μεγαλύτερη απόσταση από τον άξονα περιστροφής. ( $I_K > I_\Sigma$)

Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας έχουμε:

$U = K_\mu + K_{\sigma\tau\rho} \Leftrightarrow mgh = \dfrac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2$ . Όμως λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση είναι $\omega = \dfrac{\upsilon_{cm}}{R}$ .

Άρα $mgh = \dfrac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \dfrac{1}{2}I\dfrac{\upsilon_{cm}^2}{R^2} \Leftrightarrow \upsilon_{cm} = \sqrt{\dfrac{2mgh}{m + \dfrac{I}{R^2}}}$ και $K_{\mu\varepsilon\tau} = \dfrac{m^2 gh}{m + \dfrac{I}{R^2}}$ .

Επειδή $I_K > I_\Sigma$ είναι $K_{\mu\varepsilon\tau(K)} < K_{\mu\varepsilon\tau(\Sigma)}$ . Δηλαδή η συμπαγής σφαίρα φθάνει με μεγαλύτερη κινητική ενέργεια.

**ΘΕΜΑ 3$^0$**

**α.** Αμέσως μετά τη κρούση το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του άρα

$\upsilon_{\sigma\upsilon\sigma} = \omega.A \Leftrightarrow \upsilon_{\sigma\upsilon\sigma} = \sqrt{\dfrac{K}{m_1 + m_2}}.A \Leftrightarrow \upsilon_{\sigma\upsilon\sigma} = 0,25m/s$ .

**β.** Ο χρόνος κίνησης των σωμάτων μέχρι τη κρούση είναι $t = \dfrac{T_1}{4} = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m_1}{K}} = \dfrac{\pi}{20}s.$

Οπότε $\upsilon_0 = \dfrac{x}{t} = 2m/s$ .

**γ**. Από Α.Δ.Ο για τη πλαστική κρούση έχουμε:

$m_2\upsilon_0 - m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon_{\sigma\upsilon\sigma} \Leftrightarrow \upsilon_1 = 5m/s.$

Όμως $\upsilon_1 = \omega_1.A_1 \Leftrightarrow \upsilon_1 = \omega_1.\Delta\ell_1 \Leftrightarrow \Delta\ell_1 = \dfrac{\upsilon_1}{\sqrt{\dfrac{K}{m_1}}} \Leftrightarrow \Delta\ell_1 = 0,5m$ ·

**ΘΕΜΑ 4$^0$**

**1α.** Η γωνία που διέγραψε το σύστημα είναι $\theta = N.2\pi = 20\pi$ rad

$W_F = \tau_F.\theta \Leftrightarrow W_F = F.\dfrac{\ell}{2}.\theta \Leftrightarrow W_F = 2000j$ .

**1β.** Η τάση του νήματος που δέχεται κάθε δακτύλιος είναι η αναγκαία κεντρομόλος δύναμη για

την κυκλική κίνηση που εκτελεί, άρα $T = F_K \Leftrightarrow T = m\omega^2.d$ (1)

Όταν το σύστημα έκανε 10 περιστροφές το νήμα κόπηκε. Άρα $T=T_{\theta\rho}$. Από Θ.Μ.Κ.Ε για το σύστημα έχουμε $\Delta K = \Sigma W \Leftrightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 = W_F \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2W_F}{I}}$ .

με $I = I_{cm} + md^2 \Leftrightarrow I = \frac{1}{12} ML^2 + 2md^2 \Leftrightarrow I = 2,5 kg.m^2$ . Άρα ω=40rad/s.

Τελικά η (1) δίνει $T_{θρ}$=800N.

**2α.** Το σύστημα δε δέχεται εξωτερικές ροπές και η στροφορμή του διατηρείται. Άρα

$L_{(αρχ)} = L_{(τελ)} \Leftrightarrow I.\omega = I'.\omega'$ όπου $I' = \frac{1}{12} ML^2 + 2m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Leftrightarrow I' = 4kg.m^2$ .

Άρα $\omega' = \frac{I.\omega}{I'} \Leftrightarrow \omega' = 25 rad/s$ . Συνεπώς $\upsilon_A = \omega'.\frac{\ell}{2} \Leftrightarrow \upsilon_A = 25 m/s$ .

**2β.** Η θερμότητα που παράχθηκε είναι ίση με την απώλεια κινητικής ενέργειας του συστήματος.

$Q = K_{αρχ} - K_{τελ} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I'\omega'^2 \Leftrightarrow Q = 750 j$ .

και $\frac{Q}{W_F}.100\% = \frac{750}{2000} 100\% = 37,5\%$ .