ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1ο ΘΕΜΑ

Α1■ Έστω μια συνάρτηση **f** ορισμένη σε ένα διάστημα **Δ**

- Αν η **f** είναι **συνεχής** στο **Δ**
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο **x** του **Δ**

τότε η **f** θα είναι **σταθερή** σε όλο το διάστημα **Δ** (10 μονάδες)

Α2 Με τη βοήθεια της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

εξηγείστε γιατί είναι απαραίτητο το **Δ** να είναι **διάστημα**. (3 μονάδες)

Α3* Οι συναρτήσεις **f** και **g** ορίζονται στο **R** και είναι **δύο** φορές παραγωγίσιμες.

Αν $f'(x) = g'(x)$, για όλα τα $x \in R$

ποια από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει ακόμα, ώστε $f(x) = g(x)$

□α: $f(0) = g(0) + c$

□β: $f(0) = g(0)$

□γ: $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} g'(x)$

□δ: $f''(0) = g''(0)$

□ε: **Δεν χρειάζεται** να προστεθεί άλλη συνθήκη. (4 μονάδες)

Α4□ Έστω η παραγωγίσιμη στο **R** συνάρτηση **f**, ώστε $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in R^*$ τότε $f(x) = x + c$, για κάθε $x \in R$ ...όπου **c** κάποιος αριθμός. (4 μονάδες)

Α5* Αν $f'(x) = f(x)$, για κάθε πραγματική τιμή του **x** και $f(0) = 0$

τότε □Α: $f(x) = e$ □Β: $f(x) = -e^x$ □Γ: $f(x) = e^x$ □Δ: $f(x) = 0$ (4 μονάδες)

2^{o} ΘΕΜΑ

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \le 1 \\ e^{1-x} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι **συνεχής** στο R (5 μονάδες)

Β) Να βρείτε τα **κρίσιμα σημεία** της f (7 μονάδες)

Γ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει **μοναδική ασύμπτωτη** ευθεία. (5 μονάδες)

Δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα**. (8 μονάδες)

3^{o} ΘΕΜΑ

• Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f ώστε $f'(x) = \dfrac{2x - c}{x^4 + 2x^2 + 1}$ με $c \in R$

Ξέρουμε ότι $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in R$ και ότι η f έχει μία **ρίζα** τον αριθμό 0

Α) Να βρείτε τον c (8 μονάδες)

Β) Να αποδείξετε ότι το 0 είναι **μοναδική ρίζα** της f (5 μονάδες)

Γ) Να **βρείτε** την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ (12 μονάδες)

4^{o} ΘΕΜΑ

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ell nx$

Α) Να βρείτε το **ευρύτερο υποσύνολο** A του R στο οποίο ορίζεται η f όπως και το **σύνολο τιμών** της $f(A)$ (9 μονάδες)

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει **ακριβώς 2 ρίζες** στο A (3 μονάδες)

Γ) Αν η **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ell nx$ στο σημείο $A(\alpha, \ell n\alpha)$, με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = e^x$, στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in R$, **ταυτίζονται** να αποδείξετε ότι ο αριθμός α, είναι **ρίζα** της εξίσωσης $f(x) = 0$ (9 μονάδες)

Δ) Να **αιτιολογήσετε**, ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν **ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες**. (4 μονάδες)

Καλή επιτυχία !

Απαντήσεις

1° ΘΕΜΑ

1. **Α1.** – Θεωρία

Α2. – Αν η f: $\nearrow / \Delta$

Α3. $f(x) = ημx - x\,συνx$

$f'(x) = συνx - συνx + x\,ημx = xημx > 0$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Επειδή f: *συνεχής* η f: $\nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Από $0 < \frac{\pi}{5}$

είναι $f(0) < f\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow 0 < ημ\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{5}συν\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow ημ\frac{\pi}{5} > συν\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 5ημ\frac{\pi}{5} > πσυν\frac{\pi}{5}$

2° ΘΕΜΑ

Α) Είναι $f'(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

Για $x>1$ είναι $f'(x)>0$ άρα $f: \nearrow / 1, +\infty)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο 1 και είναι $f: \nearrow / [1, +\infty)$

θα είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

Β) Στο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{f'(x)} \overset{\frac{f(1)}{f'(1)}}{=} \lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{f''(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{x-1}{x^2+1}}{\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}} = \frac{\frac{0}{2}}{\frac{2}{4}} = 0$

Γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x + 1$

Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{x-1}{x^2+1} - 1 = \frac{-x^2+x-2}{x^2+1} < 0$

Άρα η συνάρτηση $g: \searrow / [1, +\infty)$

Από $x \geq 1 \Rightarrow g(x) \leq g(1) \Rightarrow f(x) - x + 1 \leq f(1) - 1 + 1$ ή $f(x) \leq x - 1$

3° ΘΕΜΑ

Α) Στο διάστημα $(-\infty,1)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο διάστημα $(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} e^{1-x} = 1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Επίσης $f(1) = 1$

Δηλαδή η f είναι συνεχής στο R

Β) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{1-x}-1}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(e^{1-x}-1\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1^+}\left(-e^{1-x}\right) = -1$$

Άρα η f **δεν** είναι **παραγωγίσιμη** στο $x_o = 1$

Δηλαδή το $x_o = 1$ είναι κρίσιμο σημείο της f

Επίσης $f'(x) = \begin{cases} 2x & , x<1 \\ -e^{1-x} & , x>1 \end{cases}$

για $x<1$ έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

και συνεπώς το $x_o = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της f

για $x>1$ έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{1-x} = 0$ **Αδύνατη**

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		-	0	+	0	-	
f		↘		↗		↘	

τ.ε. $f(0) = 0$ τ.μ. $f(1) = 1$

Γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{u\to -\infty} e^{u} = 0$

Ο $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Δ) Είναι προφανή τα συμπεράσματα.

4° ΘΕΜΑ

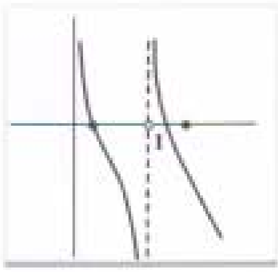
Α) Είναι $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ell nx$

Πρέπει $x \neq 1$, $x > 0$ και συνεπώς το πεδίο ορισμού είναι το $\Delta = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Η f είναι συνεχής στο Δ

Επίσης $f'(x) = (\dfrac{x+1}{x-1})' - (\ell nx)' = \dfrac{x-1-x-1}{(x-1)2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2}{(x-1)2} - \dfrac{1}{x} < 0$

Οπότε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0,1)$



και γνήσια φθίνουσα στο $\Delta_2 = (1,+\infty)$

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = R$$

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to +\infty} f(x),\ \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = R$$

Οπότε προφανώς $f(\Delta) = R$

Β) Αφού το $0 \in f(\Delta_1)$ θα υπάρχει $\alpha_1 \in \Delta_1$ ώστε $f(\alpha_1) = 0$

Αφού το $0 \in f(\Delta_2)$ θα υπάρχει $\alpha_2 \in \Delta_2$ ώστε $f(\alpha_2) = 0$

Επειδή η f αντίστοιχα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 είναι γνήσια φθίνουσα

η f θα έχει ακριβώς **2** ρίζες.

Γ) $(\varepsilon_1): y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y - \ell n\alpha = \dfrac{1}{\alpha}(x-\alpha) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\alpha}x + \ell n\alpha - 1$

$$(\varepsilon_2): y - h(\beta) = h'(\beta)(x-\beta) \Leftrightarrow y - e^{\beta} = e^{\beta}(x-\beta) \Leftrightarrow y = e^{\beta}x + e^{\beta} - \beta e^{\beta}$$

Αφού $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$ πρέπει $\frac{1}{\alpha}e^{\beta} = -1$ ή $\beta = \ell n(\frac{1}{\alpha}) = -\ell n\alpha$

$$\text{και} \quad \ell n\alpha - 1 = e^{\beta} - \beta e^{\beta} \quad \Leftrightarrow \ell n\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} + \ell n\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \ell n\alpha(1 - \frac{1}{\alpha}) = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - 1)\ell n\alpha = (\alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow \ell n\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ell n\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

Δ) Για κάθε κοινή εφαπτομένη των C_g , C_h στα $A(\alpha, g(\alpha))$, $B(\beta, h(\beta))$

το **α** την ιδιότητα να είναι ρίζα της **f**

Επειδή η **f** έχει **2** ρίζες ,είναι φανερό ότι έχουμε **2** ακριβώς εφαπτόμενες.