ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Δ R Μ.Ε.
Δικαιουλάκος Βασίλειος

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.
Β. ΔΙΚΑΙΟΥΛΑΚΟΣ
Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
τηλ.: 27210 86210, fax.: 27210 62938, Κιν.: 6944 522961
www.dikaioulakos.gr - e-mail: basdik@otenet.gr

3 ώρες

Αξιολόγηση

Ημερομηνία: - -

Επαναληπτικό 4

Όνομα:..

Βαθμός :

1ο Θέμα

Α *Απαντήστε με ένα **Σωστό** ή **Λάθος***

Έστω η **συνεχής** στο **R** συνάρτηση **f**

Α1 ☐ Αν $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$ και $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = 1$ τότε $\int_{1}^{0} f(x)\,dx = 1$ (2 μονάδες)

Α2 ☐ Αν $f(x)+\int f(x)dx = x+\int f(x)dx$ υποχρεωτικά θα είναι: $f(x) = x$ (3 μονάδες)

Α3 ☐ Είναι $\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} f(v)\,dv\,\,dz = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$ (4 μονάδες)

Α4 ☐ Είναι φανερό ότι: $\int 2x\,dx = \int_{1}^{x} 2t\,dt + c$, c :πραγματικός (4 μονάδες)

Β *Επιλέξτε την ορθή απάντηση ή τις ορθές απαντήσεις.*

Β1✱ Το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 x^{\sigma\upsilon\nu\theta}\,dx$ ισούται με ☐Α: $I = \left[\dfrac{x^{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}\right]_0^1$ αν $\theta = \dfrac{\pi}{5}$

☐Β: $I = [\ln x]_0^1$ αν $\theta = \pi$

☐Γ: $I = 1$ αν $\theta = 0$

(4 μονάδες)

Β2✱ Έστω η συνεχής στο **R** συνάρτηση **f** με $\int 3x\,f(x)\,dx = c + x^3$ με $c \in R$

Είναι βέβαιο ότι η συνάρτηση **f** **δεν μπορεί** να έχει σαν τύπο
τον ☐Α: $f(x) = x$ ☐Β: $f(x) = -x$ ☐Γ: $f(x) = 1$ ☐Δ: $f(x) = -1$ (4 μονάδες)

Β3✱ Το **πλήθος** των **ριζών** της συνάρτησης $f(x) = \int_0^x 6t^5 + 1\,dt$

είναι ☐Α:**0** ☐Β:**1** ☐Γ:ακριβώς **2** ☐Δ:το πολύ **2** ☐Ε:τουλάχιστον **2** (4 μονάδες)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.
Β. ΔΙΚΑΙΟΥΛΑΚΟΣ
Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
τηλ.: 27210 86210, fax.: 27210 62938, Κιν.: 6944 522961
www.dikaioulakos.gr - e-mail: basdik@otenet.gr

2° Θέμα

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 1-2i$ και $z_2 = 3+4i$

α) Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$ με $x, y \in R$, να αποδείξετε ότι: $x=-1$ και $y = 2$ (5 μονάδες)

β) Αν μια **ρίζα** της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$ όπου $\beta, \gamma \in R$, είναι η $\frac{z_1}{z_2}$ να βρείτε τις **τιμές** των β και γ (10 μονάδες)

γ) Να βρείτε το **γεωμετρικό τόπο** των **εικόνων** των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $|z - 2z_1| = |z_2|$ (10 μονάδες)

3° Θέμα

Δίνονται οι συναρτήσεις **f**, **g** παραγωγίσιμες στο R_+^* με $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \beta$ και $f(x) = g(x) + \alpha x e^{x^{-1}}$ για κάθε θετικό αριθμό x ...όπου α<0 και β>0

Α) Αποδείξετε ότι η **(ε) : y=αx+α+β** είναι **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$ (10 μονάδες)

Β) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \le g(x) + \alpha e$ ...για κάθε θετικό αριθμό x (5 μονάδες)

Γ) Έστω τώρα ο μιγαδικός αριθμός z=α+βi που έχει **μέτρο** $\sqrt{2}$ και του οποίου η εικόνα του Μ βρίσκεται στην προηγούμενη **ασύμπτωτη**.

Να γράψετε τους $w_1 = \frac{z^2}{2}$ και $w_2 = \frac{z^{2003}}{2^{1001}}$ στη μορφή **x+yi** (10 μονάδες)

4° Θέμα

Α) Αν για τη **συνεχή** συνάρτηση f είναι $f(x) > 0$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$ τότε να αποδείξετε ότι θα είναι υποχρεωτικά $a = b$ (5 μονάδες)

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\, e^x - \frac{x^3}{3} - x + 3$, με $x \in R$

B_1) Να μελετήσετε την f ως προς τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα**. (8 μονάδες)

B_2) Να αποδείξετε ότι: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ (4 μονάδες)

B_3) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M(x,y) για τα οποία είναι $\int_{x^2-4x}^{2y-y^2} f(t)\,dt = 0$ βρίσκοναι σε **κύκλο**, τον οποίο και να **προσδιορίσετε**. (8 μονάδες)

Καλή επιτυχία !

Αξιολόγηση 4

1° θέμα

A_1) Λ A_2) Λ A_3) Σ A_4) Σ

B_1) Α B_2) Β, Γ, Δ B_3) Γ, Δ, Ε

2° θέμα

α) Είναι $\frac{z_2}{z_1} = \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{(3-8)+(4+6)i}{1+4} = \frac{-5}{5} + \frac{10}{5}i \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} = -1+2i$$

Θέλουμε $x+yi = -1+2i \Leftrightarrow x = -1$ και $y = 2$

β)

1ος τρόπος

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3+4i} = \frac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i-6i-8}{25} = \frac{-5-10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Αφού έχει ρίζα τον αριθμό $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ θα έχει και τον συζυγή αριθμό $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

Οπότε από το άθροισμα των ριζών θα είναι $\left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = \frac{2}{5}$

Οπότε $-\beta = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \beta = -\frac{2}{5}$

Από το γινόμενο των ριζών θα είναι $\left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right)\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

Οπότε $2\gamma = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{10}$

2ος τρόπος

Από το γεγονός ότι ο αριθμός $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ είναι ρίζα της εξίσωσης την ικανοποιεί.

Δηλαδή πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$

Δηλαδή πρέπει $(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i)^2 + \beta(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i) + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{10}$ και $\beta = -\frac{2}{5}$

γ) Θέλουμε $|z-2z_1|=|z_2|$

$$\Leftrightarrow |z-2z_1|^2=|z_2|^2$$

$$\Leftrightarrow (z-2z_1)(\bar{z}-2\bar{z}_1)=(3)^2+(4)^2$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}-2z\bar{z}_1-2z_1\bar{z}+4z_1\bar{z}_1=9+16$$

$$\Leftrightarrow |z|^2-2z(1+2i)-2\bar{z}(1-2i)+4|z_1|^2=25$$

Θέτουμε $z=x+yi$

Έχουμε: $x^2+y^2-2(x+yi)(1+2i)-2(x-yi)(1-2i)+4[(1)^2+(-2)^2]=25$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2[(x-2y)+(2x+y)i]-2[(x-2y)+(-2x-y)i]+4\cdot 5=25$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y-4xi-2yi-2x+4y+4xi+2yi+20=25$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2+8y+16=5+20=25$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+4)^2=5^2$$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών **z** είναι ο κύκλος: $(\kappa):(x-2)^2+(y+4)^2=5^2$

...Φυσικά μπορούσαμε να θέσουμε από την αρχή

3° θέμα

Α) Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\alpha x+\alpha+\beta)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\alpha x-\alpha-\beta\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}(g(x)+\alpha x e^{x-1}-\alpha x-\alpha-\beta)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(g(x))-\alpha-\beta+\lim_{x\to+\infty}\alpha x(e^{x-1}-1)$$

$$=\beta-\alpha-\beta+\alpha\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{x^{-1}})}{(\frac{1}{x})}$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{=}\ -\alpha+\alpha\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{x^{-1}})'}{(\frac{1}{x})'}$$

$$=-\alpha+\lim_{x\to+\infty}\alpha\frac{e^{\frac{1}{x}}\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$=-\alpha+\lim_{x\to+\infty}\alpha e^{\frac{1}{x}}=-\alpha+\alpha e^0=-\alpha+\alpha=0$$

Άρα η ευθεία $(\varepsilon): y=\alpha x+\alpha+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Β) Θεωρούμε την $h(x) = f(x) - g(x) = \alpha x\, e^{x^{-1}} - \alpha e = \alpha x\, e^{\frac{1}{x}} - \alpha e$ με $x > 0$

Είναι: $h'(x) = \left(\alpha x\, e^{\frac{1}{x}}\right)' = \alpha e^{\frac{1}{x}} + \alpha x\, e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)' = \alpha e^{\frac{1}{x}} - \frac{\alpha}{x} e^{\frac{1}{x}} = \alpha e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$

Είναι: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 1$ ...αφού $x > 0$ και $\alpha < 0$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ...αφού $x > 0$ και $\alpha < 0$

Είναι φανερός ο διπλανός πίνακας

x	0		1	
h′		+		-
h		↗		↘

Είναι $h(x) \le h(1) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \le \alpha\, e \Leftrightarrow f(x) \le g(x) + \alpha\, e$ για κάθε $x > 0$

Γ) Αφού ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ κινείται στην ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + \alpha + \beta$

είναι: $\beta = \alpha^2 + \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\alpha = -1$

Όμως $\alpha < 0$, άρα $\alpha = -1$

Από $|z| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |z|^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 2 \Leftrightarrow (-1)^2 + \beta^2 = 2 \Leftrightarrow \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = -1$ ή $\beta = 1$

Όμως $\beta > 0$ άρα $\beta = 1$

Επομένως $z = -1 + i$

Άρα $w_1 = \frac{z^2}{2} = \frac{(-1+i)^2}{2} = \frac{1-1-2i}{2} = \frac{-2i}{2}$

$= -i$

Επίσης $w_2 = \frac{z^{2003}}{2^{1001}} = z\frac{z^{2002}}{2^{1001}} = z\left(\frac{z^2}{2}\right)^{1001} = (-1+i)(-i)^{1001}$

$= (1-i)(i)^{1001} = (1-i)(i)^{4\cdot 250+1} = (1-i)(i)^2 = (1-i)i = i - i^2 = i - (-1)$

$= 1 + i$