

3 ώρες

AΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Ημερομηνία:

Επαναληπτικό 4

Όνομα:

Βαθμός:

1^ο Θέμα

A Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος

Έστω η συνεχής στο \mathbb{R} συνάρτηση f

A₁ Av $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$ και $\int_{-1}^0 f(x) dx = 1$ τότε $\int_1^0 f(x) dx = 1$ (2 μονάδες)

A₂ Av $f(x) + \int f(x) dx = x + \int f(x) dx$ υποχρεωτικά θα είναι: $f(x) = x$ (3 μονάδες)

A₃ Είναι $\int_1^2 \int_0^1 f(v) dv dz = \int_0^1 f(x) dx$ (4 μονάδες)

A₄ Είναι φανερό ότι: $\int 2x dx = \int_1^x 2t dt + c$, c : πραγματικός (4 μονάδες)

B Επιλέξτε την ορθή απάντηση ή τις ορθές απαντήσεις.

B_{1*} Το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 x^{\sigma \nu \theta} dx$ ισούται με A: $I = \left[\frac{x^{1+\sigma \nu \theta}}{1+\sigma \nu \theta} \right]_0^1$ αν $\theta = \frac{\pi}{5}$

B: $I = [\ln x]_0^1$ αν $\theta = \pi$

C: $I = 1$ αν $\theta = 0$

(4 μονάδες)

B_{2*} Έστω η συνεχής στο \mathbb{R} συνάρτηση f με $\int 3x f(x) dx = c + x^3$ με $c \in \mathbb{R}$

Είναι βέβαιο ότι η συνάρτηση f δεν μπορεί να έχει σαν τύπο τον A: $f(x) = x$ B: $f(x) = -x$ C: $f(x) = 1$ D: $f(x) = -1$ (4 μονάδες)

B_{3*} Το πλήθος των ριζών της συνάρτησης $f(x) = \int_0^x 6t^5 + 1 dt$

είναι A: 0 B: 1 C: ακριβώς 2 D: το πολύ 2 E: τουλάχιστον 2 (4 μονάδες)

Κριτήρια

9

2^ο Επίπεδο

● Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 1 - 2i$ και $z_2 = 3 + 4i$

α) Αν $\frac{z_2}{z_1} = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $x = -1$ και $y = 2$ (5 μονάδες)

β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2y = 0$ όπου $\beta, y \in \mathbb{R}$, είναι η $\frac{z_1}{z_2}$

να βρείτε τις τιμές των β και y (10 μονάδες)

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει: $|z - 2z_1| = |z_2|$ (10 μονάδες)

3^ο Επίπεδο

● Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο \mathbb{R}_+ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \beta$

και $f(x) = g(x) + \alpha x e^{x^{-1}}$ για κάθε θετικό αριθμό x ...όπου $\alpha < 0$ και $\beta > 0$

Α) Αποδείξετε ότι η $(\epsilon) : y = \alpha x + \alpha + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. (10 μονάδες)

Β) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq g(x) + \alpha x$...για κάθε θετικό αριθμό x (5 μονάδες)

Γ) Έστω τώρα ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$ που έχει μέτρο $\sqrt{2}$
και του οποίου η εικόνα του M βρίσκεται στην προηγούμενη ασύμπτωτη.

Να γράψετε τους $w_1 = \frac{z^2}{2}$ και $w_2 = \frac{z^{2003}}{2^{1001}}$ στη μορφή $x+yi$ (10 μονάδες)

4^ο Επίπεδο

● Α) Αν για τη συνεχή συνάρτηση f είναι $f(x) > 0$ και $\int_a^b f(x) dx = 0$

τότε να αποδείξετε ότι θα είναι υποχρεωτικά $a = b$ (5 μονάδες)

Β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 2x + 3) e^x - \frac{x^3}{3} - x + 3$, με $x \in \mathbb{R}$

Β₁) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (8 μονάδες)

Β₂) Να αποδείξετε ότι: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (4 μονάδες)

Β₃) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία είναι $\int_{x^2-4x}^{2y-y^2} f(t) dt = 0$

βρίσκονται σε κύκλο , τον οποίο και να προσδιορίσετε. (8 μονάδες)

Καλή επιτυχία !

Αξιολόγηση**1^ο θέμα**

- A₁) Λ A₂) Λ A₃) Σ A₄) Σ
 B₁) A B₂) B, Γ, Δ B₃) Γ, Δ, Ε

2^ο θέμα

a) Είναι $\frac{z_2}{z_1} = \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{1^2 + (-2)^2}$
 $\Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} = \frac{(3-8)+(4+6)i}{1+4} = \frac{-5}{5} + \frac{10}{5}i \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} = -1+2i$

Θέλουμε $x+yi = -1+2i \Leftrightarrow x = -1$ και $y = 2$

β)

1^{ος} τρόπος

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{3+4i} = \frac{(1-2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i-6i-8}{25} = \frac{-5-10i}{25} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

Αφού έχει ρίζα τον αριθμό $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ θα έχει και τον συζυγή αριθμό $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

$$\text{Οπότε από το άθροισμα των ριζών θα είναι } \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = \frac{2}{5}$$

$$\text{Οπότε } -\beta = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \beta = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Από το γινόμενο των ριζών θα είναι } \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Οπότε } 2\gamma = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{10}$$

2^{ος} τρόπος

Από το γεγονός ότι ο αριθμός $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ είναι ρίζα της εξίσωσης την ικανοποιεί.

Δηλαδή πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$

$$\text{Δηλαδή πρέπει } \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right)^2 + \beta\left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{10} \text{ και } \beta = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{v) Θέλουμε } |z - 2z_1| &= |z_2| \\
 \Leftrightarrow |z - 2z_1|^2 &= |z_2|^2 \\
 \Leftrightarrow (z - 2z_1)(\bar{z} - 2\bar{z}_1) &= (3)^2 + (4)^2 \\
 \Leftrightarrow z\bar{z} - 2z\bar{z}_1 - 2z_1\bar{z} + 4z_1\bar{z}_1 &= 9 + 16 \\
 \Leftrightarrow |z|^2 - 2z(1+2i) - 2\bar{z}(1-2i) + 4|z_1|^2 &= 25
 \end{aligned}$$

Θέτουμε $z = x + yi$

$$\begin{aligned}
 \text{Έχουμε: } x^2 + y^2 - 2(x + yi)(1 + 2i) - 2(x - yi)(1 - 2i) + 4[(1)^2 + (-2)^2] &= 25 \\
 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2[(x - 2y) + (2x + y)i] - 2[(x - 2y) + (-2x - y)i] + 4 \cdot 5 &= 25 \\
 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4xi - 2yi - 2x + 4y + 4xi + 2yi + 20 &= 25 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 &= 5 + 20 = 25 \\
 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 4)^2 &= 5^2
 \end{aligned}$$

Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μηγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος: (κ) : $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 5^2$

...Φυσικά μπορούσαμε να θέσουμε από την αρχή

3^ο θέμα

$$\begin{aligned}
 \text{A) Είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \alpha + \beta)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x - \alpha - \beta) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + \alpha x e^{x-1} - \alpha x - \alpha - \beta) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x)) - \alpha - \beta + \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha x (e^{x-1} - 1) \\
 &= \beta - \alpha - \beta + \alpha \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-1})}{(\frac{1}{x})} \\
 &\stackrel{(0)}{=} -\alpha + \alpha \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{x-1})'}{(\frac{1}{x})'} \\
 &= -\alpha + \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{-1}{x^2}} \\
 &= -\alpha + \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha e^x = -\alpha + \alpha e^0 = -\alpha + \alpha = 0
 \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία (ε) : $y = \alpha x + \alpha + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Β) Θεωρούμε την $h(x) = f(x) - g(x) = \alpha x e^{x^{-1}} - \alpha e = \alpha x e^{\frac{1}{x}} - \alpha e$ με $x > 0$

$$\text{Είναι: } h'(x) = \left(\alpha x e^{\frac{1}{x}} \right)' = \alpha e^{\frac{1}{x}} + \alpha x e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} \right)' = \alpha e^{\frac{1}{x}} - \frac{\alpha}{x} e^{\frac{1}{x}} = \alpha e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$$

Είναι: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 1 \dots \text{αφού } x > 0 \text{ και } \alpha < 0$$

$$h'(x) < 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 1 \dots \text{αφού } x > 0 \text{ και } \alpha < 0$$

Είναι φανερός ο διπλανός πίνακας

x	0	+	1	-
h'	○	↗	○	↘
h	+	↗	-	↘

Είναι $h(x) \leq h(1) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq \alpha e \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) + \alpha e$ για κάθε $x > 0$

Γ) Αφού ο μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ κινείται στην ευθεία (ε) : $y = \alpha x + \alpha + \beta$

$$\text{είναι: } \beta = \alpha^2 + \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = -1$$

Όμως $\alpha < 0$, άρα $\alpha = -1$

$$\text{Από } |z| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 2 \Leftrightarrow (-1)^2 + \beta^2 = 2 \Leftrightarrow \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = -1 \text{ ή } \beta = 1$$

Όμως $\beta > 0$ άρα $\beta = 1$

Επομένως $z = -1 + i$

$$\text{Άρα } w_1 = \frac{z^2}{2} = \frac{(-1+i)^2}{2} = \frac{1-1-2i}{2} = \frac{-2i}{2} \\ = -i$$

$$\text{Επίσης } w_2 = \frac{z^{2003}}{2^{1001}} = z \frac{z^{2002}}{2^{1001}} = z \left(\frac{z^2}{2} \right)^{1001} = (-1+i)(-i)^{1001}$$

$$= (1-i)(i)^{1001} = (1-i)(i)^{4 \cdot 250+1} = (1-i)(i)^2 = (1-i)i = i - i^2 = i - (-1)$$

$$= 1 + i$$

Κατεύθυνση:

Γ' Λυκείου

4^ο θέμα

A) Αν $\alpha < \beta$ τότε από $f(x) > 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ άτοπο

$\alpha > \beta$ τότε από $f(x) > 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ άτοπο

Άρα $\alpha = \beta$

$$\begin{aligned} \text{B}_1) \text{ Είναι } f'(x) &= [(x^2 - 2x + 3)e^x - \frac{x^3}{3} - x + 3]' \\ &= (2x - 2 + x^2 - 2x + 3)e^x - x^2 - 1 \\ &= (x^2 + 1)e^x - (x^2 + 1) = (x^2 + 1)(e^x - 1) \\ &= (x^2 + 1)e^x - (x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 1)(e^x - 1) \end{aligned}$$

Για την f προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

x	- ∞	0	+ ∞
f'	-	+	+
f			

Ολικό ελάχιστο

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 6$

B₂) Αφού η f : παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0

τότε $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 6 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B₃) Επειδή $H'(x) = f(x) > 0$

από $\int_{x^2-4x}^{2y-y^2} f(t) dt = 0$ είναι

$$2y - y^2 = x^2 - 4x$$

$$\text{ή } x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

$$\text{ή (κ)} : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

Δηλαδή τα $M(x, y)$ κινούνται σε κύκλο με εξίσωση

$$\text{κέντρο: } K = \left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}\right) \equiv (2,1) \text{ και ακτίνα } \rho = \frac{\sqrt{16+4}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$