

Κριτήρια

6

3 ώρες

AΞΙΟΔΟΥ Η ΣΗ

Ημερομηνία: - - -

Επαναληπτικό 3

Όνομα:

Βαθμός:

1^ο Θέμα

A* Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .
 Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ ,
 τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$ με $c \in \mathbb{R}$
 είναι παράγουσες της f στο Δ
 και κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$
 (7 μονάδες)

B* Απαντήστε τα παρακάτω θέματα

B₁* Να αναφέρετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ .

B₂* Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη ευθεία του διαγράμματος μιας συνάρτησης f ;

B₃* Έστω η παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f . Τι δηλώνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$?
 (9 μονάδες)

Γ) Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος

Γ₁ Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε x από το πεδίο ορισμού της f

Γ₂ Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 και είναι πτερεασμένα, θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Γ₃ Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$ τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει: $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$
 (9 μονάδες)

Κριτήρια

2^ο οίκος

- Εστω ο αριθμός $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

α) Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$ να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός. (6 μονάδες)

β) Αν $|f(z)| = 1$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z (9 μονάδες)

γ) Αν $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z βρίσκονται σε κύκλο τον οποίο και να προσδιορίσετε. (10 μονάδες)

3^ο οίκος

- Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ συνάρτηση f

ώστε: $f^2(x) + x^2 = 2xf(x) + \ln^2(x-1)$ και $(x-1)f'(x) = x-2$... για κάθε $(1, +\infty)$

α) Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ (5 μονάδες)

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f (8 μονάδες)

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (7 μονάδες)

δ) Να αποδείξετε ότι: $\ln(e-1) < e-2$ (5 μονάδες)

4^ο οίκος

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$

και έστω (ε) η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $M(2\alpha, 8\alpha^2)$... με $\alpha > 0$

Α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου

που περικλείεται από την γραφική παράσταση C την ευθεία ε και τον άξονα y' (10 μονάδες)

Β) Έστω τώρα θ η γωνία που σχηματίζει η ΜΟ με την (ε)

Να εκφράσετε την εφθ σε συνάρτηση του α και να βρείτε τη μέγιστη τιμή της εφθ ... όταν το α μεταβάλλεται. (15 μονάδες)

Καλή επιτυχία !

Αξιολόγηση

3

1^ο θέμα**A) Απόδειξη**

Κάθε συνάρτηση G της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Είναι μια παράγουσα της f στο Δ

αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

Έστω τώρα G μια άλλη παράγουσα της G στο Δ

Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν: $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$

Άρα $F'(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$

Δηλαδή: $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \Delta$

B₁) Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Η f είναι συνεχής στο Δ όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του Δ

B₂) Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

Τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

B₃) Γεωμετρικά το θεώρημα μέσης τιμής δηλώνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη της Cf στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην AB

Γ₁) Λ

Γ₂) Σ

Γ₃) Λ

2^ο θέμα

a) 1^{ος} ιρόπος

Έστω $f(z) = \frac{z+i}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$

Είναι: $\left| \frac{z+i}{z} \right| = \left| \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}} \right|$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z+i}{z} \right|^2 = \left| \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}} \right|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+i}{z} \cdot \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}} \cdot \frac{z-i}{z}$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - iz + i\bar{z} - i^2 = \bar{z}z - i\bar{z} + iz - i^2$$

$$\Leftrightarrow 2iz - 2i\bar{z} = 0 = 2i(z - \bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{Im}z\text{i} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ και άρα } z \in \mathbb{R}$$

2^{ος} ιρόπος

Αν $z = x + yi$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } f(z) &= \frac{x+yi+i}{x+yi} = \frac{(x+(y+1)i)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} \\ &= \frac{x^2 - xyi + xyi + xi - y^2i^2 - yi^2}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\bar{z}) &= \frac{x-yi+i}{x-yi} = \frac{(x+(1-y)i)(x+yi)}{(x-yi)(x+yi)} \\ &= \frac{x^2 + xyi + xi - xyi + yi^2 - y^2i^2}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Από } f(z) = f(\bar{z}) &= \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}i = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}i \\ \Leftrightarrow y &= -y \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ και άρα } z = x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

β) 1^{ος} τρόπος

$$|f(z)| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z+i}{z} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|z+i|}{|z|} = 1$$

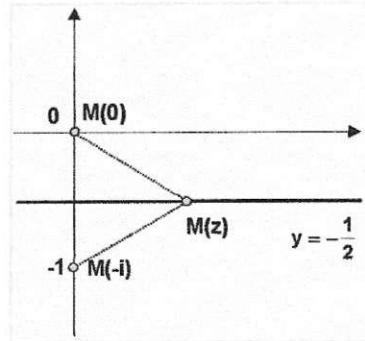
$$\Leftrightarrow |z+i| = |z|$$

$$\Leftrightarrow |z - (-i)| = |z - 0|$$

Δηλαδή οι εικόνες των z ισαπέχουν από τις εικόνες των μιγαδικών $-i$ και 0

Οπότε ανήκουν στην μεσοκάθετη ευθεία του τμήματος **AO** με **A(0,-1)** και **O(0,0)**

Οπότε ανήκουν στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}$ η οποία εκφράζει και τον γεωμετρικό τόπο.

2^{ος} τρόπος

$$\text{Από } |f(z)| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z+i}{z} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z+i| = |z|$$

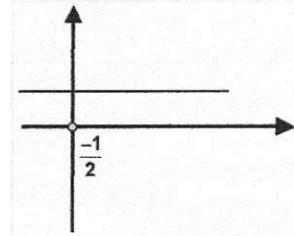
$$\Leftrightarrow |x + (y+1)i| = |x + yi|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Οπότε $M(z) = (x, -\frac{1}{2})$ και ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $(\epsilon) : y = -\frac{1}{2}$

γ) Από $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$

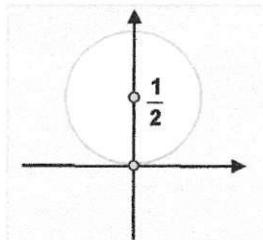
$$\text{καταλήγουμε στη σχέση } \frac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + y^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + y = 2x^2 + 2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (\kappa) : (x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Οπότε τα σημεία κινούνται στον πιο πάνω κύκλο (...εξαιρείται το **O(0,0)**)



3^ο θέμα

α) Η σχέση $f^2(x) + x^2 = 2xf(x) + \ln^2(x - 1)$

για $x = 2$ δίνει

$$f^2(2) + 4 = 4f(2) + \ln^2 1 \Leftrightarrow f^2(2) - 4f(2) + 4 = 0 \Leftrightarrow (f(2) - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow f(2) = 2$$

Η σχέση $(x - 1)f'(x) = x - 2$

για $x = 2$ δίνει $1f'(2) = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 0$

Συνεπώς η εφαπτόμενη είναι η (ε) : $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ ή $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

β) Είναι $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{x-2}{x-1}dx = \int \frac{x-1-1}{x-1}dx = \int 1 - \frac{1}{x-1}dx$

$$\begin{aligned} &= \int 1dx - \int \frac{1}{x-1}dx = x - \int \frac{1}{y}d(y+1) = x - \int \frac{1}{y}dy \\ &\quad x-1=y \\ &\Leftrightarrow x=y+1 \\ &\qquad\qquad\qquad = x - \ln|y| + c = x - \ln|x-1| + c \end{aligned}$$

Από $f(2) = 2$ έχουμε: $2 = 2 - \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Οπότε $f(x) = x - \ln|x-1|$

x	1	2	e
f'	-	+	
f			

Ολικό ελάχιστο $f(2) = 2$

γ) Είναι φανερός ο διπλανός πίνακας μεταβολών

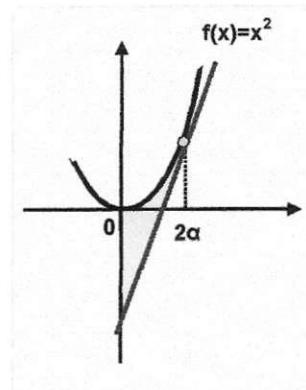
Το πεδίο τιμών της είναι το $[2, +\infty)$

δ) Από $e > 2 \Leftrightarrow f(R) > f(2) \Leftrightarrow e - \ln(e-1) > 2 \Leftrightarrow \ln(e-1) < e-2$

4ο θέμα

A) $f'(x) = 4x$

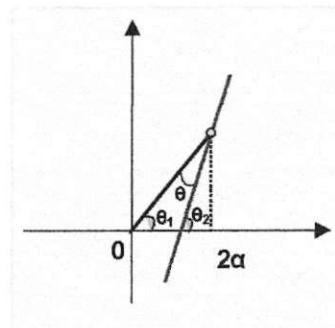
$$\begin{aligned} \text{Είναι } (\varepsilon) : y - f(2\alpha) &= f'(2\alpha)(x - 2\alpha) \\ \Leftrightarrow y - 8\alpha^2 &= 8\alpha(x - 2\alpha) \\ \Leftrightarrow y &= 8\alpha x - 8\alpha^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\alpha} 2x^2 - 8\alpha x + 8\alpha^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 4\alpha x^2 + 8\alpha^2 x \right]_0^{2\alpha} = \frac{16\alpha^3}{3} - 16\alpha^3 + 16\alpha^3 \\ &= \frac{16\alpha^3}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

B) Είναι $\varepsilon\varphi(\theta_1) = \lambda_{\vec{OM}} = \frac{8\alpha^2 - 0}{2\alpha - 0} = 4\alpha$

$$\varepsilon\varphi(\theta_2) = f'(2\alpha) = 8\alpha$$



$$\text{Οπότε } \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\varepsilon\varphi\theta_2 - \varepsilon\varphi\theta_1}{1 + \varepsilon\varphi\theta_2 \varepsilon\varphi\theta_1} = \frac{8\alpha - 4\alpha}{1 + 8\alpha \cdot 4\alpha} = \frac{4\alpha}{1 + 32\alpha^2}$$

$$\text{Θεωρούμε την } g(\alpha) = \frac{4\alpha}{32\alpha^2 + 1} / \mathbb{R}^*$$

Είναι $g'(\alpha) = -\frac{4(32\alpha^2 - 1)}{(32\alpha^2 + 1)^2}$

Η τιμή του μεγίστου είναι $g\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

α	$-\frac{\sqrt{2}}{8}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{8}$
g'		+	-
g	\nearrow	\searrow	\nearrow

Ολικό μέγιστο

Κατεύθυνση

Γ' Λυκείου