ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
Μ.Ε.
Πείρα και πάθος για την εκπαίδευση
20ετής πείρα
Δικαιουλάκος Βασίλειος
Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
Τηλ.: 27210 86210 - Κιν.: 6944 522961 - Fax: 27210 62938
e-mail: basdik@otenet.gr - www.dikaioulakos.gr

3 ώρες

Αξιολόγηση

Ημερομηνία: - -

Επαναληπτικό 5

Όνομα:

Βαθμός :

1ο Θέμα

A) Έστω η συνάρτηση **f(x)=εφx**

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση **f** είναι παραγωγίσιμη στο **R - {x/συνx = 0}**

και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{συν^2x}$ (4 μονάδες)

B) ***Απαντήστε στα παρακάτω θέματα*** (9 μονάδες)

B_1 Έστω η συνάρτηση **f/A** είναι **παραγωγίσιμη** σ' ένα σημείο $x_0 \in A$

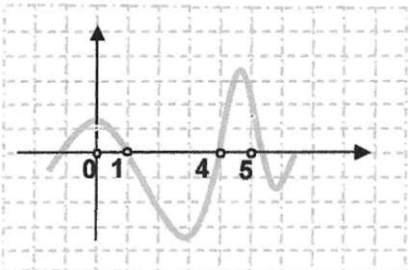
Ποια είναι η εξίσωση της **εφαπτομένης** της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$;

B_2 Πότε η συνάρτηση **f** με πεδίο ορισμού το **A** λέγεται συνάρτηση **1-1** ;

B_3 Έστω η συνάρτηση **f** με πεδίο ορισμού του **A** και ένα σημείο $x_0 \in A$

Πότε λέμε ότι το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ είναι **σημείο καμπής** της C_f ;

Γ) Έστω **C** η γραφική παράσταση της συνάρτησης που βλέπουμε στο **σχήμα** η οποία υποθέτουμε ότι είναι **3** φορές παραγωγίσιμη.



Να βρείτε το **πρόσημο**

των ολοκληρωμάτων $I_1 = \int_0^5 f(x)dx$, $I_2 = \int_0^5 f'(x)dx$, $I_3 = \int_0^5 f''(x)dx$ (12 μονάδες)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
Δικαιουλάκος Βασίλειος
Πείρα και πάθος για την εκπαίδευση
Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
Τηλ.: 27210 86210 - Κιν.: 6944 522961 - Fax: 27210 62938
e-mail: basdik@otenet.gr - www.dikaioulakos.gr

2^0 Θέμα

❍ Έστω οι συναρτήσεις **f** , **g / R** με $f'(x) - g'(x) = 1$ και $f'(x) \neq 1$, $x \in R$

Επίσης είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) + 2) = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x - 2) = 0$

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x) + 2}{f(x) - x - 2}$ (5 μονάδες)

β) Να βρείτε τις **ασύμπτωτες** των διαγραμμάτων των **f** , **g** στο $+\infty$ (5 μονάδες)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση **g** έχει το **πολύ μία ρίζα**. (6 μονάδες)

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x) - g(x) = x + 4$ (9 μονάδες)

3^0 Θέμα

● Έστω η παραγωγίσιμη στο **R** συνάρτηση **f** ώστε $f'(x) = \dfrac{-2x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

Ξέρουμε ότι η συνάρτηση **f** έχει **μέγιστο** το **1**

α) Να βρείτε σε ποια **θέση** παίρνει το **μέγιστο**. (5 μονάδες)

β) Να βρείτε τα **όρια**: i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xf(x)}{e^x - 1}$ και ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - f(x)}{x}$ (10 μονάδες)

γ) Να βρείτε τον **τύπο** της συνάρτησης **f** (10 μονάδες)

4^0 Θέμα

❍ Έστω η συνάρτηση $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2}{\alpha + e^t} dt$ με $\alpha > 0$ και $x \in R$

Έστω και ο μιγαδικός αριθμός $z(x) = g(x) + xi$ με $|\overline{z(x)} + i| \leq |z(x) - 1|$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση **g** **αντιστρέφεται**

και μάλιστα οι εικόνες του **z(x)** ανήκουν στο διάγραμμα της g^{-1} (3 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι: $Re(z(x)) \leq Im(z(x))$ για κάθε $x \in R$ (3 μονάδες)

γ) Να αποδείξετε ότι: $\alpha = 1$ (6 μονάδες)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση **g** στρέφει τα **κοίλα κάτω** (5 μονάδες)

ε) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{2}{e^2 + 1} < \displaystyle\int_0^2 \frac{2}{1 + e^t} dt - \int_0^1 \frac{2}{1 + e^t} dt < \frac{2}{1 + e}$ (8 μονάδες)

Καλή επιτυχία !

Αξιολόγηση 5

1ο θέμα

Α1) Έστω η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει: $f(x) = εφx = \frac{ημx}{συνx}$ με $συνx \neq 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις, των παραγωγισίμων $h(x) = ημx, g(x) = συνx$

και μάλιστα είναι: $f'(x) = \left(\frac{ημx}{συνx}\right)' = \frac{(ημx)'\,συνx - (συνx)'ημx}{συν^2x}$

$$= \frac{συνx \cdot συνx + ημx \cdot ημx}{συν^2x} = \frac{1}{συν^2x}$$

Β1) Η εφαπτόμενη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι: $(ε): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Β2) Μια συνάρτηση f, είναι $1-1$
όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$
ισχύει η συνεπαγωγή: αν για κάθε x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$
ή αν για κάθε x_1, x_2 με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι $x_1 = x_2$

Β3) Έστω η παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(α, β)$
με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 συνάρτηση f
Αν η f είναι κυρτή στο $(α, x_0)$ και κοίλη στο $x_0, β)$ ή αντιστρόφως
και η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$
τότε το $M(x_0, fx_0)$ ονομάζεται σημείο καμπής της C_f

Γ) $I_1 = \int_0^5 f(x)\,dx < 0$ ...αφού $\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^5 f(x)\,dx > 0$

$I_2 = \int_0^5 f'(x)\,dx = [f(x)]_0^5 = f(5) - f(0) > 0$

$I_3 = \int_0^5 f''(x)\,dx = [f'(x)]_0^5 = f'(5) - f'(0) = f'(5) < 0$ ...αφού $C_f :\downarrow /[α, β]$

2° θέμα

Έστω $\mathbf{f,g/R}$ συναρτήσεις
για τις οποίες ισχύει: $f'(x)-g'(x)=1$, $f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in R$
Επίσης ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2)=0$

α) Είναι $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+2}{f(x)-x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(g(x)+2)}{(f(x)-x-2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{f'(x)-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

β) Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+2)\big)=0$
η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την $(\varepsilon_1): y=x+2$ όταν $x\to+\infty$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2)=0$ ή $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-2$
η Cg έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $(\varepsilon): y=-2$ όταν $x\to+\infty$

γ) Έστω ότι g είχε 2 ρίζες τις ρ_1 , ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$
Τότε
g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2)
$g(\rho_1)=g(\rho_2)=0$
Από το θεώρημα Rolle για την g στο $[g_1,g_2]$ υπάρχει $\rho\in(\rho_1,\rho_2)$
ώστε $g'(\rho)=0 \Leftrightarrow f'(\rho)-1=0 \Leftrightarrow f'(\rho)=1$ *άτοπο* ,αφού $f'(\rho)\neq 1$

δ) Από $f'(x)-g'(x)=1$
είναι $(f(x)-g(x))'=(x)'$
$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=x+c$ με $c\in R$
Οπότε και $f(x)-x=g(x)+c$
ή $f(x)-x-2+2=g(x)+2-2+c$
Έτσι είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x-2)+2=\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2)-2+c$
$\Leftrightarrow 0+2=0-2+c$
$\Leftrightarrow c=4$
Για $c=4$ η σχέση $f(x)-g(x)=x+c$ γράφεται: $f(x)-x=g(x)+4$
Δηλαδή $f(x)-g(x)=x+4$ για κάθε $x\in R$

3° θέμα

Έστω f/R : παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $f'(x)=\dfrac{-2x}{x^4+2x^2+1}$

α) Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x}{x^4+2x^2+1}=0 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x=0$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^4+2x^2+1}>0 \Leftrightarrow -2x>0 \Leftrightarrow x<0$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^4+2x^2+1}<0 \Leftrightarrow -2x<0 \Leftrightarrow x>0$$

Έτσι για την f προκύπτει ο πίνακας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘

Ολικό μέγιστο

Άρα η f έχει ολικό μέγιστο το $f(0)$ στο $x=0$ και μάλιστα είναι $f(0)=1$

β) Είναι $I_1=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot f(x)}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x\cdot f(x))'}{(e^x-1)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+x\cdot f'(x)}{e^x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(f(x)+x\cdot f'(x))}{\lim\limits_{x\to0}e^x}=\frac{f(0)+0\cdot f'(0)}{e^0}=f(0)=1$$

Είναι $I_2=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-f(x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-f(x))'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-f'(x)}{1}$

$$=-\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{(1-f(x))'}{(x)'}=\lim_{x\to0}\frac{-f'(x)}{1}$$

$$=-\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x^4+2x^2+1}=0$$

γ) Είναι: $f'(x)=\dfrac{-2x}{x^4+2x^2+1}=\dfrac{(1)'(x^2+1)-(x^2+1)'\cdot1}{(x^2+1)^2}$

Δηλαδή $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)'$ τότε: $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+c$ με $c\in R$

Για $x=0$ είναι: $f(0)=\dfrac{1}{0^2+1}+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$

Οπότε $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$

° θέμα

) Είναι: g'(x) = > O για κάθε χ e R

a + **e'**

Οπότε g :t /R και κατά συνέπεια g: **1 -1** και επομένως η g αντιστρέφεται.

Επειδή $g^{-1}(g(x)) = x$

είναι φανερό ότι οι εικόνες M(ζ) • (g(x),x) του ζ(χ) = g(x) + xi

ανήκουν στο διάγραμμα της Cg^{-1}

) Είναι z(x)+i |**Z(X)-1**|

o $|g(x) - xi + i|^2$ <, |g(x) + χί - *if*

o $g^2(x) + (1 - x)^2$ ^ $(g(x) - 1)^2 + x^2$

o $g^2(x)$ + **1 - 2x** + x^2 <, $g^2(x)$ **- 2g**(x) + **1** + x^i

⇔ **-2x^-2g**(x)

o χ 2 g(x)

⇔ g(x) < χ

o Re(z(x)) £ Im(z(x)) για κάθε χ e R

) Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) = g(x) - χ

Επειδή g(x) < χ

o g(x) - χ ;£ 0

o g(x)-x ^g(0)-0

⇔ f(x) <: f(0)

Επειδή η f εμφανίζει στο 0 μέγιστο

από θεώρημα Fermat θα είναι f'(0) = 0

» g'(0)-1 = 0 » g'(0) = 1 & **2** / **a** + **e** **1** / α + **1** **= 1** ⇔ **2 = a** +**1** o **a = 1**

) Είναι g"(x) = **(** **2** ι **α=γ'** **2** / να + β^; ~ **J** + $\mathbf{e}^x$ **- 2** $\mathbf{e}^x$ / **(1 -** $\mathbf{e}^x$**)**^{2} < 0 για κάθε χ e R

Οπότε η g στρέφει τα κοίλα κάτω

Από **1** ^ χ <; **2** o g'(1) ^g'(x) 2: g'**(2)** fg'(1)dx > fg'(x)dx > f — ^ d x

Ji **Ji** **Ji ⊰ 4. e**

o **2** / **1** + **e** > **Ji** f ° **2** / **I** +**e**^{x} dx + **J** ° f ² **2** / **1** + $\mathbf{e}^x$ dx > **Λ** f^2 **2** / **1** + $\mathbf{e}^x$ dx

$\mathbf{e}^2$ + **-< Ĩ²——** dt< **1** + **e**