10. Διαγώνισμα στις ταλαντώσεις …Απαντήσεις

Θέμα Α: 1-δ, 2-γ, 3-γ, 4-β, 5(α-Λ, β-Λ, γ-Σ, δ-Λ, ε-Σ).

Θέμα Β.

Β.1: Από το διάγραμμα παρατηρούμε $Q_A=Q$, $Q_B=2Q$, $Q_A=2Q_B$ (1), $T_B=2T_A$ (2) και $T_B=2T_A \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_B}=2\frac{2\pi}{\omega_A} \Rightarrow \omega_A=2\omega_B$ (3).

α) $I_A=\omega_A Q_A \xrightarrow[(3)]{(2)} I_A=2\omega_B 2Q_B=4(\omega_B Q_B)=4I_B \Rightarrow \boxed{I_A=4I_B}$ άρα (α) Λάθος.

β) $\omega_A=2\omega_B \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{L_A C}}=2\sqrt{\frac{1}{L_B C}} \Rightarrow \boxed{L_B=4L_A}$ άρα (β) Σωστή.

γ) $E_A=\frac{Q_A^2}{2C} \xrightarrow{(1)} E_A=\frac{(2Q_B)^2}{2C} \Rightarrow E_A=\frac{4Q_B^2}{2C} \Rightarrow \boxed{E_A=4E_B}$ άρα (γ) Λάθος.

Β.2 Και στις δύο περιπτώσεις επειδή τα σώματα αφήνονται από το φυσικό μήκος του ελατηρίου χωρίς αρχική ταχύτητα, το πλάτος ισούται με την στατική παραμόρφωση του ελατηρίου (…απόσταση από τη θέση ισορροπίας).

$1^η$ ταλάντωση: $mg=K.\Delta\ell_1=KA_1 \Rightarrow A_1=\frac{mg}{K}$

$$\frac{1}{2}D_1A_1^2=\frac{1}{2}m\upsilon_{01}^2 \Rightarrow K\left(\frac{mg}{K}\right)^2=m\upsilon_{01}^2 \Rightarrow \upsilon_{01}=g\sqrt{\frac{m}{K}}\ (1)$$

$2^η$ ταλάντωση: $2mg=\frac{K}{2}.\Delta l_1=\frac{K}{2}A_2 \Rightarrow A_2=\frac{4mg}{K}$

$$\frac{1}{2}D_2A_2^2=\frac{1}{2}2m\upsilon_{02}^2 \Rightarrow \frac{K}{2}\left(\frac{4mg}{K}\right)^2=2m\upsilon_{02}^2 \Rightarrow \upsilon_{02}=2g\sqrt{\frac{m}{K}}\ (2)$$

από (1) και (2) $\boxed{\upsilon_{02}=2\upsilon_{01}}$, άρα σωστή η πρόταση (β).

Β.3: $E_{15}=\frac{E_0}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}DA_{15}^2=\frac{1}{8}\frac{1}{2}DA_0^2 \Rightarrow A_{15}=\frac{A_0}{\sqrt{8}} \Rightarrow A_{15}=A_0 2^{-3/2}$

$$A=A_0e^{-\Lambda t} \xrightarrow[t=15T]{A=A_{15}} A_{15}=A_0e^{-\Lambda 15T} \Rightarrow A_0 2^{-3/2}=A_0e^{-\Lambda 15T} \Rightarrow -\frac{3}{2}\ell n2=-\Lambda 15T \Rightarrow$$

$3\ell n2=\Lambda 30T\ (1)$

$A=A_0e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2}=A_0e^{-\Lambda NT} \Rightarrow \ell n2=\Lambda NT\ (2)$ από (1) και (2) $N=10$ ταλαντώσεις

Σωστή η πρόταση (β).

Θέμα Γ.

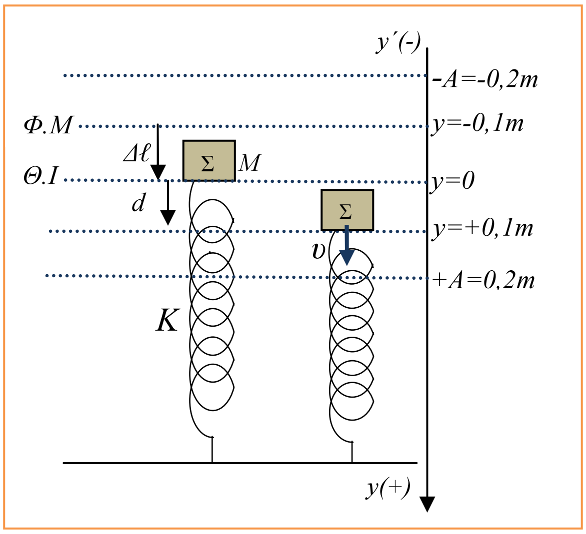
Γ.1) $D=K=M\omega^2 \Rightarrow \omega=10 rad/s$, $\upsilon_{max}=\omega A \Rightarrow \boxed{A=0,2m}$

Γ.2) Ο ταλαντωτής παίρνει ενέργεια μέσω του έργου της δύναμης F. Έτσι η ενέργεια του ταλαντωτή ισούται με το έργο της δύναμης F…

$W_F=E_{ταλ} \Rightarrow Fd=\frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow \boxed{F=20N}$

Γ.3) Εδώ απαιτείται η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης. Ο ταλαντωτής ισορροπεί με το ελατήριο να έχει στατική παραμόρφωση $\Delta\ell$, $\Sigma F = 0 \Rightarrow Mg = K\Delta\ell \Rightarrow \Delta\ell = 0,1m$.

Εξίσωση απομάκρυνσης $y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu(10t + \varphi_0)$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ που καταργείται η δύναμη F ο ταλαντωτής έχει απομάκρυνση $y = +0,1m$ και ταχύτητα θετική αποδεικνύεται (… αποδείξτε το) ότι $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \ldots\ y = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})\ (S.I)$.

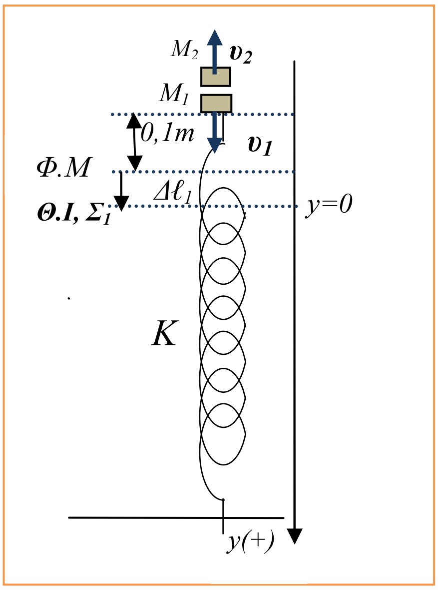


Για $t = \frac{\pi}{15}s$ βρίσκουμε

$y = 0,2\eta\mu(10\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{6}) = 0,2\eta\mu(\frac{5\pi}{6}) = 0,1m$

Στη θέση αυτή η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι $\Delta\ell = 0,2m$, άρα $\boxed{F_{\varepsilon\lambda} = K\Delta\ell = 20N}$ με φορά προς τα πάνω.

Γ.4) Ο ταλαντωτής στην ανώτερη θέση έχει ταχύτητα υ=0 και απέχει από το ΦΜ του ελατηρίου απόσταση 0,1m. Μετά την έκρηξη ταλαντωτής είναι το σώμα Σ_1 που έχει μάζα M_1=0,5Kg, ταχύτητα υ_1, θέση ισορροπίας $\Delta\ell_1$ κάτω από το Φ.Μ , σταθερά ταλάντωσης K και πλάτος ταλάντωσης έστω A_1.



$p_{\pi\rho\iota\nu} = p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow 0 = M_2\upsilon_2 - M_1\upsilon_1 \xrightarrow{M_1=M_2} \upsilon_1 = \upsilon_2 = 2\sqrt{2}m/s$

$M_1 g = K.\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta l_1 = \frac{M_1 g}{K} = 0,05m$.

Μόλις αρχίζει η νέα ταλάντωση : $\upsilon_1 = -2\sqrt{2}m/s$

$y = -(\Delta\ell_1 + 0,1)m = -0,15m$

$\frac{1}{2}M_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}D_1 y^2 = \frac{1}{2}D_1 A_1^2 \xrightarrow{D_1=K} A_1 = \sqrt{\frac{M_1\upsilon_1^2}{K} + y^2}$

$\boxed{A_1 = 0,25m}$

Θέμα Δ.

Δ.1) $\Delta t_1 = 0,1\pi 10^{-3}s = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4\pi.10^{-4}s \Rightarrow \omega = 5.10^3 rad/s$, $I = \omega Q \Rightarrow \boxed{I = 0,1A}$

Δ.2) $U_{B,max} = E = \frac{1}{2}L_1 I^2 \Rightarrow L_1 = \frac{2U_{B,max}}{I^2} \Rightarrow \boxed{L_1 = 10^{-2}H}$

$U_{E,max} = E = \frac{Q^2}{2C} \Rightarrow C = \frac{Q^2}{2E} \Rightarrow C = 4.10^{-6}F$

Δ.3) $q = Q\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow q = 20.10^{-6}\sigma\upsilon\nu(5.10^{3}.\frac{5\pi}{3}.10^{-3}) \Rightarrow q = 10.10^{-6}C$ ή $q = 10\mu C$

Αυτό είναι το μέγιστο πλάτος φορτίου στο κύκλωμα Β $Q_0 = 10\mu C$. Αρχική ενέργεια στο κύκλωμα Β, $E_0 = \frac{Q_0^2}{2C} = 1,25.10^{-5}J$. Μετά από 10 ταλαντώσεις η ενέργεια του κυκλώματος είναι $E_{10} = E_0 - Q_{\theta\varepsilon\rho\mu} = 0,05.10^{-5}J$. Το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή τότε είναι, $E_{10} = \frac{Q_{10}^2}{2C} \Rightarrow Q_{10} = 2.10^{-6}C$. Πρέπει όμως να βρούμε πόσο είναι το πλάτος του πυκνωτή στις 5 πρώτες ταλαντώσεις.

$Q = Q_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow Q_{10} = Q_0 e^{-\Lambda 10T} \Rightarrow 2.10^{-6} = 10.10^{-6}e^{-\Lambda 10T} \Rightarrow \frac{1}{5} = \left(e^{-\Lambda 5T}\right)^2$ ή $e^{-\Lambda 5T} = \sqrt{1/5}$ (1)

$Q = Q_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow Q_5 = Q_0 e^{-\Lambda 5T} \Rightarrow Q_5 = 10.10^{-6}e^{-\Lambda 5T}$ ή $Q_5 = 10.10^{-6}\sqrt{1/5} = 2\sqrt{5}.10^{-6}C$.

Η ενέργεια στο τέλος της 5ης ταλάντωσης είναι $E_5 = \frac{Q_5^2}{2C} = 0,25.10^{-5}J$ και η απώλεια ενέργειας στις 5 πρώτες ταλαντώσεις είναι $Q'_{\Theta\varepsilon\rho\mu\iota\kappa\acute{\eta}} = E_0 - E_5 = 1.10^{-5}J$, άρα ποσοστό απωλειών

$$\Pi = \frac{Q'_{\theta\varepsilon\rho\mu\iota\kappa\acute{\eta}}}{E0}100\% = 80\%$$

Δ.4) Η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος (Β) είναι $f_{0B} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{L_2C}}$ ή $f_{0B} = 250Hz$. Προφανώς για να έχουμε συντονισμό πρέπει η συχνότητα της τάσης τροφοδοσίας του κυκλώματος (Γ) να είναι $\boxed{f = f_{0B} = 250Hz}$, άρα σωστή η σχέση (γ).