

**ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ**



**Δικαιουλίκος Βασίλειος**

Αριστομένους 65, τηλ. 27210 86210

www.dikaiouliakos.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Επιμέλεια: ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Tis απαντήσεις θα τις βρείτε στο [eleftheriaonline.gr](http://eleftheriaonline.gr)

ΜΕΛΟΣ ΟΜΟΣΠΟΝΔΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΩΝ ΕΛΛΑΔΟΣ Ο.Ε.Φ.Ε.



**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$ . Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

**Μονάδες 10**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη «Σ» αν είναι σωστή ή «Λ» αν είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $z \in \mathbb{C}$  τότε η εικόνα του  $-z$  είναι το συμμετρικό σημείο της εικόνας του  $z$  ως προς το σημείο  $O(0, 0)$ .

**β.** Μια συνάρτηση είναι 1-1 αν και μόνο αν: για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της, η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μια λύση ως προς  $x$ .

**γ.** Αν μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1 τότε για την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  ισχύουν οι σχέσεις:  $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$  και  $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$ .

**δ.** Αν  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z| = 2$  τότε  $\bar{z} = \frac{4}{z}$ .

**ε.** Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι πάντοτε γνησίως μονότονη.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Αν ισχύει η σχέση:  $z\bar{z} + 3(z - \bar{z})i = 4(z + \bar{z})$  (1),  $z \in \mathbb{C}$  τότε:

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  είναι κύκλος με κέντρο  $K(4, 3)$  και ακτίνα  $\rho_1 = 5$ , ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 7**

**B2.** Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του  $|z|$  και να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός με μέγιστο μέτρο είναι ο  $z_1 = 8 + 6i$ .

**Μονάδες 8**

**B3.** Αν ο παραπάνω μιγαδικός  $z_1$  είναι ρίζα της εξίσωσης:  $\frac{1}{4}z^2 + \beta z + \gamma = 0$ , τότε να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών  $\beta$  και  $\gamma$ .

**Μονάδες 5**

**B4.** Αν για τον μιγαδικό αριθμό  $z_0$  που ικανοποιεί τη σχέση (1) ισχύει:

$$\left(\frac{\bar{z}_0 - 4 + 3i}{w - 5i}\right)^{2012} = 5^{2012}, w \neq 5i \text{ τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών } w \text{ ανήκουν σε κύκλο με κέντρο } \Lambda(0, 5) \text{ και ακτίνα } \rho_2 = 1.$$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι 1-1 τότε:

**G1.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι 1-1.

**Μονάδες 5**

**G2.** Αν ισχύει η σχέση:

$$g(\ln(f(x)+1) - \ln(e^x + 2)) = g(\ln(2e^x + 1) - 2\ln(e^x + 2)) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}, x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**G3.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 8**

**G4.** Να λύσετε την εξίσωση:  $f(f^{-1}(1-x) - 2) = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 2}$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = \ln x + 1, x > 0$  και  $g$ , ώστε:

$$(1): (g \circ f)(x) = -\ln x - 2ex - 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

**Δ1.** Να βρείτε τη συνάρτηση  $g$  με το ευρύτερο πεδίο ορισμού.

**Μονάδες 8**

**Δ2.** Αν  $g(x) = -2e^x - x, x \in \mathbb{R}$  και

$$(2): h^3(x) + h(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

τότε να αποδείξετε ότι η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η  $h$  αντιστρέφεται και ότι η γραφική παράσταση της  $h^{-1}$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A(-1, 0)$ .

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να λύσετε την ανίσωση:

$$h(2e^{-4x} - 2e^{x^2+3} - x^2 - 4x - 3) < -1$$

**Μονάδες 5**

**ΒΕΝΖΙΝΑΔΙΚΑ**

**ΜΕΣΣΗΝΙΑΣ (10.30 μ.μ. - 1 π.μ.)**

A. ΚΟΥΤΣΟΥΜΠΟΣ (οδός Αρτέμιδος), ΜΟΥΡΙΚΗΣ (οδός Ναυαρινού), ΧΡΟΝΟΠΟΥΛΟΣ (οδός Αθηνών), ΚΟΥΡΟΥΣΗΣ (Κάμπος), ΤΣΙΜΠΟΥΡΗΣ (Μεσσήνη), ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ (Βαθύρα), ΤΣΟΡΩΝΗΣ-ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ Ο.Ε. (Εύα), ΚΕΧΑΓΙΑΣ (Μάνεση), ΠΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ-ΓΚΟΤΣΗΣ (Διαβολίτσι), Π. ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΣ (Βελίκα), ΨΩΝΗΣ (Καζάρμα), ΠΛΑΝΤΑΖΟΠΟΥΛΟΣ (Φοινικούντα), Αφοί ΚΥΡΙΑΚΟΠΟΥΛΟΙ (Αγ. Ανδρέας), Ν.Φ. ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΣ (Πεταλίδι), ΣΚΟΥΡΑΣ (Αριοχώρι), ΤΟΤΣΗΣ (Δώριο), ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΗΣ (Μεμι), ΖΑΦΕΙΡΑΚΗΣ (Καλό Νερό), ΚΟΥΤΣΑΝΑΣΤΑΣΗΣ (Τερψιθέα), ΛΑΜΠΟΥΣΗΣ (Γαργαλιάνοι), ΠΑΝΑΓΙΩΤΟΠΟΥΛΟΥ (Πυργάκι), ΑΡΑΜΠΑΤΖΗΣ (Φιλιατρά).

**ΛΑΚΩΝΙΑΣ (10.30 μ.μ. - 12.30 π.μ.)**

ΚΕΡΑΣΙΩΤΗ-ΑΣΗΜΑΚΟΠΟΥΛΟΥ (Αμύκτες), ΔΡΙΒΑΣ (Γυθείου 123), ΜΠΑΓΙΑΤΑΚΟΥ (Συκίτσα), ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΟΣ & ΣΙΑ (Μαγούλα), ΜΠΑΪΡΑΚΤΑΡΗΣ (Παλαιοδόγιο), ΧΙΟΣ (Βορδόνια), ΑΛΕΥΡΟΜΑΓΕΙΡΟΥ ΑΦΟΙ Ο.Ε. (1ο κλμ. Γερολιμένα - Κοκκάδας), ΚΟΚΚΟΛΗΣ (Βασιλάκι), ΝΤΑΛΙΑΝΗ (Δαφνί), ΓΚΙΟΥΖΕΠΗ (Γλυκόβρυση), ΚΟΥΤΣΟΦΙΟΣ (Ασωπός), ΜΠΑΪΡΑΚΤΑΡΗΣ (Μονεμβασιά), ΚΟΥΤΣΟΒΑΣΙΛΗ (Περιστέρι), ΔΑΜΙΑΝΑΚΟΣ (Ε.Ο. Σπάρτης - Γυθείου πλησίον ΚΕΕΜ), ΑΡΓΕΙΤΗΣ (Νεάπολη).

**ΑΡΚΑΔΙΑΣ (10.30 μ.μ. - 12.30 π.μ.)**

ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ (Σκοπή), ΣΙΑΝΝΑΣ (Ναυπλίου 199), ΡΕΒΕΛΗΣ-ΜΟΥΡΓΕΛΑΣ (Ναυπλίου 56), ΓΑΒΡΗΛΟΣ ΕΜ. & ΣΙΑ Ο.Ε. (Ναυπλίου 50), ΚΑΚΛΑΜΑΝΟΣ Α.Ε. (Ναυπλίου 195), ΚΟΝΤΟΠΟΥΛΟΥ (Λ. ΟΗΕ 54), ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ (Λ. ΟΗΕ 1), ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ (Πλ. Εθν. Μακαρίου), ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΥ (Λαγονάτη & Τηλέφου 2), ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ [1ο κλμ. Τρίπολης - Πύργου (Μηλιά)], ΒΕΡΒΑΙΝΙΩΤΗΣ (Κάψια), ΔΙΑΜΑΝΤΗ (Λεβίδι), ΚΑΛΚΑΝΗΣ (5ο κλμ. Τρίπολης - Σπάρτης), ΧΑΣΑΠΗΣ (Κερασίτσα), ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ (5ο κλμ. Τρίπολης - Σπάρτης), ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ (20ο κλμ. Τρίπολης - Σπάρτης), ΜΠΙΛΙΔΑΣ (Στάδιο), ΚΑΒΟΥΡΙΝΟΣ (Βλαχέρνα), ΓΚΑΒΟΓΙΑΝΝΗΣ (Παναγίτσα), ΓΚΑΒΟΓΙΑΝΝΗΣ (Βυτίνα), ΠΑΝΟΠΟΥΛΟΣ (Σταυροδόμοι), ΤΣΙΡΜΠΑΣ (Καθαμών 53 Μεγ/λη), Η. ΤΣΙΡΜΠΑΣ - Ν. ΣΤΑΣΙΜΙΩΤΗΣ Ε.Ε. (Αρ. Θεάτρου 39 Μεγ/λη), ΚΩΣΤΟΓΙΑΝΝΗΣ (Ασέα), ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ (Ασέα), ΛΙΟΝΤΗΣ Κ. (παλαιό) (Π. Αστρος), ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗ (Αστρος), ΚΑΡΑΜΕΡΟΣ (Κορακοβούνι), ΨΑΡΟΛΟΓΟΣ (Τυρός), ΣΙΩΡΑ (Λεωνίδιο).

**ΦΑΡΜΑΚΕΙΑ**

**ΚΑΛΑΜΑΤΑ**  
 Μ. ΓΑΪΤΑΝΑΡΟΥ  
 Βασ. Γεωργίου 6  
 τηλ. 27210 83952  
 (8 π.μ. - 2 μ.μ. και 5.30 μ.μ. - 8 π.μ. επομένως)  
 Σ.Φ.Π. ΜΠΟΥΖΙΑΝΗ-Α. ΜΑΥΡΟΥ  
 Νέδοντος 79 (δημοτικό parking)  
 τηλ. 27210 26383  
 (8 π.μ. - 9 μ.μ.)  
**ΜΕΣΣΗΝΗ**  
 Σ. ΡΟΥΣΣΗΣ  
 Σταδίου 4  
 τηλ. 27220 24932  
 (Ανοικτό ημέρα και νύχτα)  
**ΧΩΡΑ**  
 Τ. ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ  
 τηλ. 27630 31710  
**ΠΥΛΟΣ**  
 Π. ΤΣΑΡΠΑΛΑΣ  
 τηλ. 27230 22556  
**ΑΓ. ΝΙΚΟΛΑΟΣ**  
 Β. ΓΟΥΜΒΡΗΣ  
 τηλ. 27210 78230  
**ΜΕΛΙΓΑΛΑΣ**  
 Π. ΛΥΚΟΓΙΑΝΝΗΣ  
 τηλ. 27240 22446  
**ΧΑΡΑΚΟΠΙΟ**  
 Ε.-Μ. ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΥ  
 τηλ. 27250 41000  
**ΘΟΥΡΙΑ**  
 Γ. ΞΗΡΟΓΙΑΝΝΗ  
 τηλ. 27210 32672  
**ΚΥΠΑΡΙΣΣΙΑ**  
 Β. ΑΝΔΡΩΝΗ  
 τηλ. 27610 23026  
**ΚΟΠΑΝΑΚΙ**  
 Α. ΚΑΡΑΜΠΕΛΑ  
 τηλ. 27650 22111  
**ΔΩΡΙΟ**  
 Σ. ΚΟΥΤΚΟΥΛΟΣ  
 τηλ. 27650 32155  
**ΓΑΡΓΑΛΙΑΝΟΙ**  
 Π. ΣΤΑΘΟΠΟΥΛΟΣ  
 τηλ. 27630 23197  
**ΦΙΛΙΑΤΡΑ**  
 Π. ΣΕΡΑΦΕΙΜ  
 τηλ. 27610 32102  
**ΣΠΑΡΤΗ**  
 Μ. ΑΡΦΑΝΗ  
 Αγιοσίδου 24  
 τηλ. 27310 81271  
**ΤΡΙΠΟΛΗ**  
 Κ. ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑΣ  
 Πλ. Κολλοκορώνη 18  
 τηλ. 2710 233911  
 Ε. ΝΤΑΪΦΩΤΗΣ  
 28ης Οκτωβρίου 15  
 τηλ. 2710 222105

**Τη πρόγραμμα ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ**

<p><b>ΕΤ1</b>                  06.30 Μίλη μου πρόσωπο                  07.30 Mediterranean                  08.00 Θέσπερ Σκιάου                  08.30 Ειδικός πράκτορας Οσο                  09.00 Στο σταυροδρόμιο της ζωής                  09.30 Μικροί Άνιστοι                  10.00 Πρωινιάδα                  10.30 76η Διεθνής Έκθεση Θεσσαλονίκης                  11.30 Mediterranean                  12.00 Ο Ανδροκλής και τα λιοντάρια του                  12.30 Μίλη μου πρόσωπο                  13.30 76η Διεθνής Έκθεση Θεσσαλονίκης                  14.30 Αθήναγες                  15.00 Πέπερ Άνν                  15.30 Οι ανακαταστάσεις                  16.00 Ζακ και Κόνι, εν πλώ                  16.30 Οι μάγοι του Γουέβερλι Πίλς                  18.00 Eurobasket Λιθουανία 2011                  20.00 Λαζάρω                  21.00 Eurobasket Λιθουανία 2011                  23.00 Ξένι τανία                  «Η γη της ελευθερίας»                  01.00 Ελληνική σαβόρα                  02.00 Πύργος παρόδων                  03.00 Εκτός πορείας                  04.00 Σκίς στο περιστέλιο</p>	<p><b>ANT1</b>                  06.00 Της Ελένης το παιδί (Ε)                  07.00 Elatte                  11.00 Litso.com (Ε)                  12.00 Ονειροπαγίδα (Ε)                  13.00 Το νέο του ANTI                  13.30 Ακρας οικογενειακών (Ε)                  14.30 Play and win                  14.40 Κωνσταντίνου και Ελένης (Ε)                  15.40 Play and win                  15.50 Το κορμί της Χαράς (Ε)                  16.50 Το νέο του ANTI                  17.00 Reaper                  18.00 Νεανική τανία                  «Greek»                  19.00 Οι στήθιοι της Εριέτας Ζαΐμη (Ε)                  20.00 Το νέο του ANTI                  21.00 Eze!l                  23.00 Grey's anatomy VI                  00.00 Criminal minds II                  01.00 Το νέο του ANTI                  01.10 Kismet                  03.10 Το κορμί της Χαράς (Ε)                  04.10 Τηλεμάρκετινγκ</p>	<p><b>STAR</b>                  07.10 Το στρουμφάκι                  07.30 Πρωινό Μελέτη                  10.15 Το φιλόσοφο                  11.15 Σπίρτα, είσαι η ζωή μου                  13.00 Ειδήσεις                  13.45 Ο Σκόμπος και ο βασιλιάς κοκινόκαρας                  15.15 Christine                  15.45 Ο πρίγκιπας του Bel Air                  16.45 Two and a half men                  17.45 Ειδήσεις                  17.50 Ντεκέταρ Μονκ                  18.50 Ισραήλ υποθέσεις                  19.45 Ειδήσεις                  21.00 Ομάδα NCIS VI                  22.00 Ξένι τανία                  «Ο κυριώνας»                  00.45 Supernatural                  01.45 Ανεξήγητες υποθέσεις                  02.45 Ξένι τανία                  «Το τελευταίο φιλί»                  05.00 Battlestar galactica</p>	<p><b>ALTER</b>                  ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΝΑΚΟΙΝΩΘΕΙ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ</p>	<p><b>ΣΚΑΪ</b>                  06.00 Πρώτη γραμμή                  10.00 Σκιά τώρα                  13.00 How do I look                  14.00 Ντανία πρώτων βοηθειών                  15.00 Σκιά life                  16.50 Ειδήσεις                  17.00 Accidentally on purpose                  17.30 Το πιο ασίδη βίντεο του κόσμου                  18.00 Το νέο του ΣΚΑΪ                  18.45 The 'F' Word                  19.45 Doctor who                  21.00 Το νέο του ΣΚΑΪ                  22.00 CSI: Las Vegas VIII                  23.00 Αόρατοι κάτοικοι                  00.15 Το νέο του ΣΚΑΪ                  00.30 Critical Rescue                  01.30 Gangland                  02.30 Entertainment this week                  03.30 Queer eye for the straight Guy                  04.30 The Oprah Winfrey show                  05.30 Το νέο του ΣΚΑΪ</p>	<p><b>NET</b>                  06.00 Πρωινό ενημέρωσης                  10.00 Συμβολίσι τώρα                  12.00 Ειδήσεις                  13.00 Μένουμε Ελλάδα (νέος κύκλος εκπομπών)                  15.00 Ειδήσεις                  16.00 Από τον Καθηγητή στον Καϊταρβό                  17.00 Βιβλίο στο κομμάτι                  18.00 Κεντρικό δελτίο ειδήσεων                  19.00 Διο φορές Έννος: η συνθήκη της Λαζάρω                  20.00 Champions net                  21.00 Champions League pre game                  21.45 Champions League                  23.45 Champions net                  01.45 Ξένι τανία                  «Επικίνδυνος Δευτέρα»                  03.15 Διο φορές Έννος: η συνθήκη της Λαζάρω                  04.15 Μένουμε Ελλάδα (νέος κύκλος εκπομπών)</p>	<p><b>MEGA</b>                  06.00 Βέρα στο δεξί (Ε)                  07.00 Κοινωνία ώρα MEGA                  10.00 Επτά θανάσιμες νεβέρπες (Ε)                  12.10 Masterchef (Ε)                  13.10 Κανείς δε θέλει σ' αγαπάει (Ε)                  14.00 Μεσημβρινό δελτίο ειδήσεων                  15.00 Μουσικά και σωάρια (Ε)                  16.00 Πέρι ανέμων και υδάτων (Ε)                  16.50 Απογευματινό δελτίο ειδήσεων                  17.00 Το κόκκινο δωμάτιο (Ε)                  18.00 Singles 3 (Ε)                  19.00 Πενήντα πενήντα (Ε)                  20.00 Κεντρικό δελτίο ειδήσεων                  21.00 Η πολυκατοικία (Ε)                  22.00 Ευτυχημένοι μαζί (Ε)                  23.10 Στο παρά πέντε (Ε)                  00.15 Τελευταία γεγονότα                  00.30 Breaking bad                  01.30 Ixni                  02.45 Μουσικό του Α. Μινουσιλέν                  04.20 Telemarketing</p>	<p><b>NOVASPORTS 1</b>                  07.00 Πρωτάθλημα Super League 2011/12                  09.00 Αγγλικό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου                  11.00 Γαλλικό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου                  13.00 Αγγλικό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου                  15.00 Πρωτάθλημα Super League 2011/12                  17.00 Πρωτάθλημα ποδοσφαίρου Αργεντινής                  18.00 Παγκόσμιο πρωτάθλημα FIAT gt1                  19.45 Αγγλικό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου                  21.45 Δυναμό Ζάγκρεμπ - Ρεϊλ Μονδρίνς                  23.45 Αγγλικό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου                  00.10 Η ώρα των πρωταθλητών                  01.10 Αγγλικό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου                  03.00 Γαλλικό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου                  05.00 Πρωτάθλημα Super League 2011/12</p>	<p><b>902</b>                  07.00 Παιδικό πρόγραμμα                  07.30 Η Ελλάδα και ο κόσμος                  08.00 Καλημέρα με τον 902                  09.00 Στην όψη του νήματος (Ε)                  10.00 Η αγορά στην τηλεόραση                  15.00 Ειδήσεις                  15.50 Ειδήσεις στη νοηματική                  15.55 Μουσικές διαδρομές</p>	<p><b>16.15</b> Αθλητικά ροιτεβού                  17.00 Μέχρι τη νίκη                  18.00 Έννοιας παρόδοις                  19.00 Η Ελλάδα και ο κόσμος                  20.00 Πανόσκι                  20.30 Ειδήσεις                  21.30 Μουσικές διαδρομές                  22.00 ΠΑΜΕ ταξικά                  23.00 Ειδήσεις                  23.15 Μουσικό διαίτημα</p>
--	---	---	---	---	--	---	---	--	---