3ο διαγώνισμα στα κύματα -Απαντήσεις

Θέμα Α: 1-δ, 2-γ,3-α, 4-γ, 5(α-Λ, β-Σ, γ-Λ, δ-Λ, ε-Σ)

Θέμα Β:

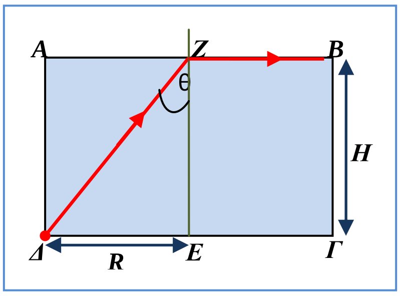
Β.1. Σωστή η (γ). Τη στιγμή $t = t_2$ έχουμε $\upsilon_N = \upsilon_{max} = \omega A\,(1)$ και $\upsilon_M = \omega A \sigma \upsilon \nu(\varphi_M) \Rightarrow \upsilon_M = \omega A \sigma \upsilon \nu(\frac{4\pi}{3}) \Rightarrow \upsilon_M = -\frac{\omega A}{2}$ … κατά μέτρο $\upsilon_M = \frac{\upsilon_{max}}{2}$ (2).

Από (1) και (2) παίρνουμε $\boxed{\upsilon_M = \frac{\upsilon_N}{2}}$.

Β.2. Σωστή η (δ). Επειδή στο δεμένο άκρο έχουμε δεσμό, για το μήκος της χορδής ισχύει $\ell = (2\kappa+1)\frac{\lambda_1}{4} = (2\kappa+1)\frac{\upsilon}{4f_1}$. Ο 10^ος^ δεσμός αντιστοιχεί στην τιμή κ=9 οπότε $\ell = 19\frac{\upsilon}{4f_1}$ (1). Για τριπλάσια συχνότητα ισχύει $\ell = (2\kappa'+1)\frac{\upsilon}{4.3f_1}$ (2). Από τις (1) και (2) παίρνουμε $\kappa' = 28$, άρα θα έχουμε $\boxed{29\ \delta\varepsilon\sigma\mu o\acute{\upsilon}\varsigma}$ (…το κ΄ παίρνει 29 τιμές 0,1,2,3…,28).

Β.3. Α) Σωστή η σχέση (Α.1). Η γωνία θ είναι προφανώς η κρίσιμη γωνία $\theta_{crit} = \theta$, $n.\eta\mu\theta = 1.\eta\mu 90^0 \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{1}{n}$ (1). Από το σχήμα παίρνουμε $\eta\mu\theta = \frac{\Delta E}{\Delta Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{3R}{4}\right)^2}}$

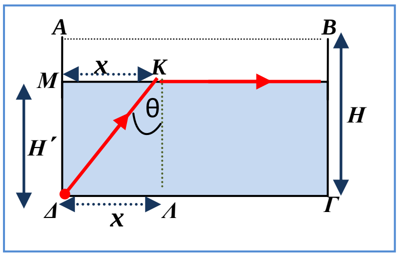
$\Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{4}{5} = 0,8$ …Από την (1) παίρνουμε $\frac{4}{5} = \frac{1}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{5}{4}}$.



Β) Σωστή η σχέση (Β.3). Τώρα διάθλαση έχουμε μόνο στην περιοχή $MK = x$

$\varepsilon\varphi\theta = \frac{x}{H'} \Rightarrow \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{x}{H'} \Rightarrow \frac{0,8}{0,6} = \frac{x}{H'} \Rightarrow x = \frac{4}{3}H'$ (2),

$H' = H - 0,4H = 0,6H$ (3) . Από (2) και (3) παίρνουμε $x = \frac{4}{3}0,6H \Rightarrow x = 0,8H = 0,8.\frac{3}{4}R \Rightarrow x = 0,6R$, άρα το ποσοστό μείωσης είναι $\pi = \frac{x-R}{R}100\% \Rightarrow \boxed{\pi = -40\%}$

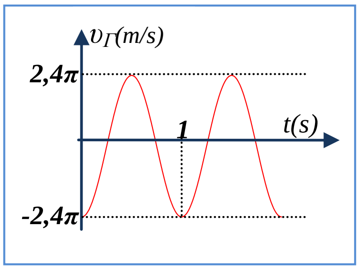


Θέμα Γ:

Α) $\lambda = \frac{\upsilon}{f} = 0,4m$, $\ell = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} \xrightarrow[\kappa=7]{\delta\varepsilon\sigma\mu o\acute{\iota}\,8} \boxed{\ell = 1,5m}$. Εξίσωση στάσιμου κύματος $\boxed{y(x,t) = 0,2\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\eta\mu(20\pi t)}$ (S.I).

Β) Εξίσωση ταλάντωσης του σημείου Γ, $y_Γ = -A'ημ(20πt)$ (… έχει ίδια φάση με την κοιλία που είναι στην αντίστοιχη άτρακτο…).

$y_Γ = -A'ημ(20πt) \Rightarrow A' = 0{,}12m$, άρα οι χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας του σημείου Γ είναι $\boxed{y_Γ = -0{,}12ημ(20πt)}$ και $\boxed{υ_Γ = -2{,}4πσυν(20πt)}$ (SI).



Γ) Για να σχηματισθεί στάσιμο κύμα πρέπει

$$\ell = (2κ+1)\frac{λ}{4} = (2κ+1)\frac{υ}{4f} \Rightarrow f = (2κ+1)\frac{υ}{4\ell} \Rightarrow$$

$$f = (2κ+1)\frac{4}{4.1{,}5} \Rightarrow f = (2κ+1)\frac{2}{3}$$ (1) με $f < 10Hz \Rightarrow 2κ+1 < 15$.

Επίσης για να σχηματισθεί κοιλία στην θέση $x = 1m$ πρέπει $x = κ'\frac{λ}{2} = κ'\frac{υ}{2f} \Rightarrow$

$1 = κ'\frac{4}{2f} \Rightarrow f = 2κ'$ (2) με $f = 2κ' < 10Hz \Rightarrow κ' < 5$ Από (1) και (2) παίρνουμε

$\frac{f}{f} = \frac{(2κ+1)2/3}{2κ'} \Rightarrow 1 = \frac{(2κ+1)}{3κ'} \Rightarrow \frac{2κ+1}{κ'} = \frac{3}{1}$ (!!!) Επειδή (2κ+1) θετικός ακέραιος περιττός και κ΄ ακέραιος θετικός οι τιμές που μπορεί να πάρουν οι ανωτέρω ποσότητες είναι (2κ+1=3 , κ΄=1) και όλα τα ακέραια πολλαπλάσια αυτών, έτσι ώστε η ποσότητα (2κ+1) να είναι πάντοτε θετικός ακέραιος περιττός. Επειδή όμως έχουμε και τους περιορισμούς $2κ+1 < 15$ και $κ' < 5$ τα μόνα ζευγάρια που πληρούν τις ανωτέρω προϋποθέσεις είναι (2κ+1=3 , κ΄=1) και (2κ+1=9 , κ΄=3).

1η περίπτωση: $(2κ+1) = 3 \xrightarrow{(1)} f = 3\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{f = 2Hz}$

2η περίπτωση: $(2κ+1) = 9 \xrightarrow{(1)} f = 9\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{f = 6Hz}$

Δ) Για να σχηματισθεί στάσιμο κύμα πρέπει $\ell = N\frac{λ}{2} = N\frac{υ}{2f} \Rightarrow f = N\frac{υ}{2\ell} = N\frac{4}{3}$ (3)

με $f = N\frac{4}{3} < 20Hz \Rightarrow N < 15Hz$. Επίσης για να σχηματισθεί κοιλία σε απόσταση

$OΔ = 1{,}25m$ πρέπει $OΔ = κ\frac{λ}{2} + \frac{λ}{4} \Rightarrow OΔ = (2κ+1)\frac{λ}{4} \Rightarrow OΔ = 1{,}25 = (2κ+1)\frac{υ}{4f}$

$\Rightarrow f = \frac{2κ+1}{1{,}25}$ (4) με $f = \frac{2κ+1}{1{,}25} < 20 \Rightarrow 2κ+1 < 25$. Από (3) και (4) παίρνουμε $N\frac{4}{3} = \frac{2κ+1}{1{,}25} \Rightarrow \frac{N}{2κ+1} = \frac{3}{5}$. Επειδή (2κ+1) θετικός ακέραιος περιττός και Ν ακέραιος θετικός οι τιμές που μπορεί να πάρουν οι ανωτέρω ποσότητες είναι (Ν=3 και 2κ+1=5) και όλα τα ακέραια πολλαπλάσια αυτών έτσι ώστε η ποσότητα (2κ+1) να είναι πάντοτε θετικός ακέραιος περιττός. Επειδή όμως έχουμε και τους περιορισμούς $2κ+1 < 25$ και $N < 15$ τα μόνα ζευγάρια που πληρούν τις ανωτέρω προϋποθέσεις είναι (Ν=3 , 2κ+1=5) και (Ν=9 , 2κ+1=15)

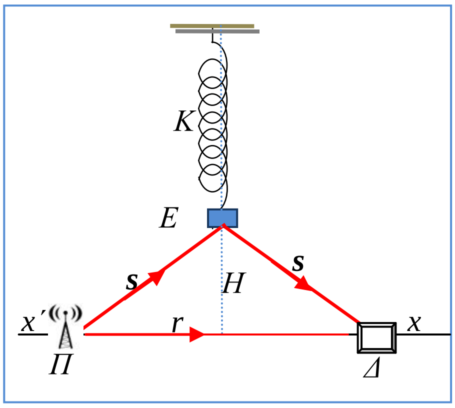
1η περίπτωση: $N = 3 \xrightarrow{(3)} f = 3\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{f = 4Hz}$

<u>1^η περίπτωση</u>: $N = 9 \xrightarrow{(3)} f = 9\dfrac{4}{3} \Rightarrow \boxed{f = 12Hz}$

Θέμα Δ:

Α) Προφανώς $(ΠΕΔ) - (ΠΔ) = κλ \xrightarrow{κ=1} 2s - r = λ\,(1)$. Από τη γεωμετρία του σχήματος παίρνουμε $s = \sqrt{H^2 + (r/2)^2} = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2} \Rightarrow s = 2{,}5m$ και με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε $λ = 2m$ και

$$f = \frac{c}{λ} = \frac{3.10^8\,m/s}{2m} \Rightarrow \boxed{f = 1{,}5.10^8\,Hz}$$

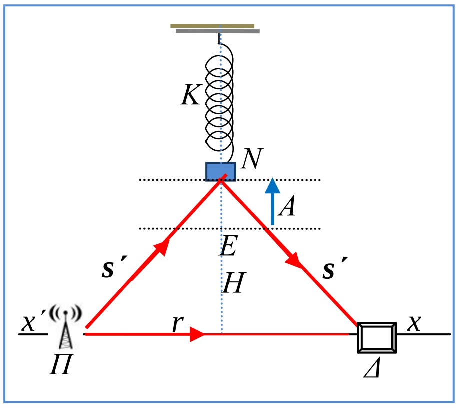


Β) Για απόσβεση στο (Δ) έχουμε $2s - r = (2κ+1)\dfrac{λ}{2} \Rightarrow 2.2{,}5 - 3 = (2.0+1)\dfrac{λ'}{2} \Rightarrow$ $λ' = 4m$.

$$f' = \frac{c}{λ} = \frac{3.10^8\,m/s}{4m} \Rightarrow \boxed{f' = 0{,}75.10^8\,Hz}$$

Γ) $(ΠΝΔ) - (ΠΔ) = (κ+1)λ \xrightarrow{κ=1} 2s' - r = 2λ\,(2)$.

Από τη γεωμετρία του σχήματος παίρνουμε $s' = \sqrt{(H+A)^2 + (r/2)^2}$ και με αντικατάσταση στη (2) έχουμε:



$$2\sqrt{(2+A)^2 + 1{,}5^2} - 3 = 2.2 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{(2+A)^2 + 1{,}5^2} = 7 \Rightarrow 4[(2+A)^2 + 1{,}5^2] = 49$$

$$\Rightarrow (2+A) = \sqrt{10} \Rightarrow \boxed{A = 1{,}16m}$$

$$D = K = Mω^2 \Rightarrow ω = 5rad/s$$

$$υ_0 = ωA \Rightarrow \boxed{υ_0 = 5{,}8m/s}$$

Δ) Πρέπει μεταξύ επιφάνειας Ε και πηγής Π να μην υπάρχει καμία υπερβολή ενίσχυσης … $\dfrac{λ}{2} > H \Rightarrow \dfrac{c}{2f} > H \Rightarrow f < \dfrac{c}{2H} \Rightarrow f < \dfrac{3.10^8\,m/s}{2.2m} \Rightarrow \boxed{f < 0{,}75.10^8\,Hz}$