ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Διαδικαστικά Θέματα για εξάσκηση σε κάθε κεφάλαιο

Μιγαδικοί αριθμοί

1.1 Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Α$_1$) Αποδείξτε ότι $z^2 = \bar{z}$ $\quad z^2 + z + 1 = 0$ $\quad z^3 = 1$

Α$_2$) Υπολογίστε τα μέτρα $|z|$ $\quad |z + \bar{z}|$ $\quad |z\bar{z}|$ $\quad |z^3|$ $\quad |z^2 - z|$

Β) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{1}{2} + z\right)^{2008} \in R$

Γ) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων $A = z^{2007} + \frac{1}{z^{2007}}$ και $B = z^{2008} + \frac{1}{z^{2008}}$

Δ) Να αποδείξετε ότι $|z^v - 1| \le 2$, για κάθε $v \in N$

Ε$_1$) Αν για τον μιγαδικό αριθμό w, είναι $|w - z| = 1$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες των w κινούνται σε κύκλο, διερχόμενο του $O(0,0)$, τον οποίο και να βρείτε.

Ε$_2$) Να βρείτε εκείνον τον w, με το μεγαλύτερο μέτρο.

1.2 Έστω ο μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z, ώστε $z^5 = -\bar{z}$

Α) Να αποδείξετε ότι $|z^5| = |z|$

Β) Να βρείτε το $|z|$

Γ) Να αποδείξετε ότι $z^6 = -1$

Δ) Αν z_1, z_2 δύο από τους προηγούμενους μιγαδικούς, αποδείξτε ότι $|z_1 - z_2| \le 2$

Ε) Να αποδείξετε ότι $(z^2 + 1)\cdot(z^4 - z^2 + 1) = 0$

Ζ) Αν ο z δεν είναι φανταστικός, να αποδείξετε ότι $|z^2 - 1| = 1$

1.3 Έστω οι $z_1, z_2 \in C$, ώστε $|z_1| = |z_2| = 1$ και $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$

Α) Να αποδείξετε ότι $z_1 \ne z_2 \ne 0$

Β) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $OM(z_1)M(z_2)$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -1$ και $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = -1$

Δ) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right) = \frac{1}{2}$

Ε) Να αποδείξετε ότι $z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2$ ή $z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_2$

Ζ) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2004} = z_2^{2004}$

1.4 Έστω η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot z^2 - 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot z + 1 + \eta\mu^2\theta = 0$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Α) Να αποδείξετε ότι έχει **ρίζες** τις $z_{1,2} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} \pm \varepsilon\varphi\theta \cdot i$

Β) Αν το σημείο **M** είναι η **εικόνα** εκείνης της **ρίζας** της εξίσωσης η οποία έχει **φανταστικό** μέρος **αρνητικό**, να αποδείξετε ότι το σημείο **M** **κινείται** στην **ισοσκελή υπερβολή** $(\upsilon): x^2 - y^2 = 1$

Γ) Αν $\theta = 0$, να βρείτε τις διαφορετικές **τιμές** της παράστασης $\Pi_\nu = (iz_1)^\nu + (-iz_2)^\nu$ ... ν θετικός φυσικός.

1.5 Έστω ο **μη πραγματικός μιγαδικός** αριθμός z, με $z + \frac{1}{z} + \kappa = 0$, $\kappa \in R$

Α) Να αποδείξετε ότι $|\kappa| < 2$

Β) Να αποδείξετε ότι **υπάρχουν ακριβώς δύο** τέτοιοι αριθμοί z

Γ) Έστω z_1, z_2 αυτοί οι αριθμοί.

Υποθέτουμε ότι $z_1 + z_2 = -1$

Γ1) Να **διαπιστώσετε** ότι $\kappa = 1$

Γ2) Να τους **προσδιορίσετε**.

Γ3) **Υπολογίστε** την $\Pi = z_1^2 + z_2^2 - z_1^4 z_2^4$

Γ4) Αν $|w - z_1| = |w - z_2|$, αποδείξτε ότι $w \in R$

1.6 Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z και ο μιγαδικός w ώστε $w(z-1) = 2z - i$

Α) Να αποδείξετε ότι Α1) $z \neq 1$ και Α2) $w \neq 2$

Β) Να αποδείξετε ότι $\frac{w-i}{w-2} = z$

Γ1) Αν οι **εικόνες** του z κινούνται στο **κύκλο κέντρου** O και **ακτίνας** $\rho = 1$ και $M(x, y)$ είναι οι εικόνες του w, να αποδείξετε ότι αυτά τα σημεία $M(x, y)$ κινούνται στην **ευθεία** $(\varepsilon): 4x - 2y - 3 = 0$

Γ2) Να **βρείτε** τώρα, εκείνο το μιγαδικό w, που έχει το **ελάχιστο μέτρο**.

1.7 Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί w, z

Α) Αν $\bar{w} = -w$, τότε ο αριθμός w είναι **φανταστικός**.

Β) Έστω ότι $(z+i)^{17} + (2i)^{11}(\bar{z} - i)^6 = 0$, με $z \neq -i$

Β1) Να **αποδείξετε** ότι $z \neq i$

Β2) Να αποδείξετε ότι $|\bar{z} - i| = |z + i| = |iz - 1| = 2$

Β3) Να αποδείξετε ότι $\bar{z} - i = \frac{4}{z+i}$

Β4) Να αποδείξετε ότι ο $w = \frac{(z+i)^2 - 4}{z+i}$ είναι **φανταστικός**.

Κλασική ανάλυση

2.1 Αν $f(x-y)=f(x)+f(-y)$ για κάθε $x,y\in R$

να αποδείξετε ότι

A_1) $f(0)=0$

A_2) η συνάρτηση f είναι **περιττή**

A_3) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ με $x,y\in R$

B_1) Να αποδείξετε ότι $f(\nu x)=\nu f(x)$, για $\nu\in N^*$

B_2) Υπολογίστε την **τιμή** της παράστασης $\Pi=f(1)+f(10)+f(-1)+f(90)+f(100)$

B_3) Αν η f είναι $1-1$, να **λύσετε** την εξίσωση $3f(x)=f(2)+f(3)+f(22)$

2.2 Έστω η συνάρτηση f ώστε $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in R_+^*$

A_1) Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$ και μετά ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

A_2) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right)<0$, να αποδείξετε ότι $f(4)>0$

A_3) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x,y\in R_+^*$

Β) Θεωρούμε τώρα, ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **μοναδική ρίζα**, την **προφανή**.

B_1) Να **αποδείξετε** ότι η f θα είναι $1-1$

B_2) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)f^{-1}(y)$ για κάθε $x,y\in f(R_+^*)$

B_3) Να **λύσετε** την εξίσωση $2f^2(x)=f(4)f(x)$

2.3 Για τις συναρτήσεις f,g είναι $(f\circ f)(x)=2x^3+x-2$ και $g(x)=x^4-xf(x)+1$

Α) Να διαπιστώσετε πρώτα ότι $2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+1>0$, για κάθε $x_1,x_2\in R$

Β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$

Γ) Να αποδείξετε ότι $f(f(1))=f(f(f(1)))=f(1)=1$

Δ) Επίσης, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g **δεν** είναι $1-1$

2.4 Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση f ώστε $(f \circ f)(x) = 2x - 1, x \in \mathbf{R}$

Α) Να αποδείξετε ότι $A_1)$ $f(f(1)) = 1$ $A_2)$ $f(f(f(1))) = 3f(1) - 2$ $A_3)$ $f(1) = 1$

Β) Να αποδείξετε ότι $B_1)$ η f είναι $1-1$ $B_2)$ $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ $B_3)$ $2f^{-1}(x) = f(x) + 1$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\Gamma_1)$ $f(2x-1) = 2f(x) - 1$ και $\Gamma_2)$ $f(x) = 2f\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1$

2.5 Α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$A_1)$ Να **βρείτε** το ευρύτερο υποσύνολο Δ του $\mathbf{R}$, στο οποίο ορίζεται η f

$A_2)$ Να **γράψετε** τη συνάρτηση f σαν **σύνθεση** δύο συναρτήσεων.

$A_3)$ Να διαπιστώσετε ότι η f ορίζεται στο σημείο $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$ με $\alpha, \beta \in \Delta$

$A_4)$ Να **αποδείξετε** ότι $f(\alpha) + f(\beta) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right)$ με $\alpha, \beta \in \Delta$

$A_5)$ Να **βρείτε** το $f(0)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι **περιττή**

$A_6)$ Να **αποδείξετε** ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$

$A_7)$ Να **αποδείξετε** ότι $f(\Delta) = \mathbf{R}$

$A_8)$ Να **βρείτε** τη συνάρτηση f^{-1}

Β) Έστω και η συνάρτηση $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ με $x \in \mathbf{R}$

Να **βρείτε** τη συνάρτηση g **σύνθεση** f

2.6 Έστω η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

ώστε
- f **συνεχής** στο $\mathbf{R}$
- f **γνησίως μονότονη** στο $\mathbf{R}$ με το **ίδιο είδος μονοτονίας**.
- Η C_f **διέρχεται** από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,1)$
- Το **σύνολο τιμών** της f είναι το $\mathbf{R}$

Α) Να **αποδείξετε** ότι η f, είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbf{R}$

Β) Να **αποδείξετε** ότι η $f \circ f$, είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbf{R}$

Γ) Να **αποδείξετε** ότι η f^{-1}, είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbf{R}$

και ότι η **εξίσωση** $2f^{-1}(x) = x$, έχει **μοναδική λύση το 1**

Δ) Να **λύσετε** την εξίσωση $f^{-1}(f(x^2 - 7) + 1) = 1$

Ε) Να **αποδείξετε** ότι $f^{-1}(f(x^2 - 7) + 1) > 1$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

Όρια

3.1 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2 + \lambda^2} - 3x$, με $\lambda > 0$

Να βρείτε τις τιμές των ορίων Α) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ Β) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ Γ) $\lim\limits_{x \to \frac{\lambda\sqrt{5}}{5}} \left(\dfrac{f(x)}{5x - \lambda\sqrt{5}} \right)$

3.2 Έστω η συνάρτηση $y = f(x) = \dfrac{\alpha x^4 - x^2 - x + \beta}{x^2 - 1}$

Καθώς το x μεγαλώνει **απεριόριστα**, τα y τείνουν να **συγκεντρωθούν** σε κάποιον πραγματικό αριθμό L_1

Καθώς το x πλησιάζει το 1, τα y τείνουν να **συγκεντρωθούν** σε κάποιον πραγματικό αριθμό L_2

A_1) Να βρείτε τους α και L_1

A_2) Να βρείτε τους β και L_2

B_1) Τότε να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{x+1}$

B_2) ότιως επίσης και το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$

3.3 Έστω η ορισμένη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, ώστε $|f(x)| \le x^4$

Να βρείτε τις τιμές

A_1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ A_2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ A_3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^2(x)}{x}$

Β) Αν είναι και $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - x)g(x) = 1$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) \cdot g(x))$

Γ) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ Γ_1) να αποδείξετε ότι αυτό **δεν είναι πεπερασμένο**.

Γ_2) και μάλιστα αν είναι και $g(x) \le -e^x$, να **βρείτε** την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

3.4 Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ και οι πραγματικοί αριθμοί α και $\beta \neq 0$

Ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x + \alpha} = 1$, $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{P(x)}{x + \alpha} = \beta$ και $P(0) = 6$

Α) Να αποδείξετε ότι ο **βαθμός** του $P(x)$ είναι **ίσος** με 1 και ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι της **μορφής** $P(x) = \kappa x + \lambda$

Β) Να βρείτε το $P(x)$

Γ) Να βρείτε τους α και β

Συνέχεια

4.1 Έστω η ορισμένη και **συνεχής** στο **R** συνάρτηση **f**

και η ορισμένη στο **R** συνάρτηση **g**, ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}x^4g(x)=-2$

A) Να βρείτε το **f(0)**

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση **g** είναι **ασυνεχής** στο σημείο $x_o=0$

Γ) Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\,g(x)}{x}$

Δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)g(x)$ είναι **συνεχής** στο $x_o=0$

4.2 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & \text{αν } 0\le x<2 \\ \left(\alpha^2+\beta^2\right)\cdot e^{2-x}+(6\alpha+10)\ln(x-2+e) & \text{αν } x\ge 2\end{cases}$

A_1) Να βρείτε τα **όρια** $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)$ και την τιμή **f(2)**

A_2) Να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, ώστε η **f** να είναι **συνεχής** στο σημείο $x_o=2$

B) Για τις τιμές των **α,β** του **A_2)**

B_1) να **βρείτε** και το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

B_2) Θεωρούμε τη **συνεχή** στο **R** συνάρτηση **g**

για την οποία είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(0)\cdot g(x)\right)+\lim\limits_{x\to 0}\left(f(2)\cdot \text{συν}x\cdot g(x)\right)=0$ και $g(0)\neq 0$

Αποδείξτε ότι **υπάρχει** ένας τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$, ώστε $g(x_o)=0$

4.3 Έστω η **συνεχής** στο **R** συνάρτηση **f** ώστε $x^2f(x)=\eta\mu^2x-x^2+\alpha$

A_1) Να βρείτε το **α**

A_2) Να βρείτε το **f(0)**

A_3) Να **βρείτε** την **f**

B_1) Να **βρείτε** τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

B_2) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)<0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)<0$

B_3) **Δείξτε** ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=-\frac{1}{2}$, τέμνει την C_f σε **δύο** τουλάχιστον **σημεία**.

4.4 Έστω η **συνεχής** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση f ώστε $f(x)\cdot(f(x)-2x)=2^{2x}-x^2$ με $x\in\mathbf{R}$ και έστω ότι $f(1)>0$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x$, με $x\in\mathbf{R}$

A_1) Να αποδείξετε ότι η h έχει **σταθερό πρόσημο** στο $\mathbf{R}$

A_2) Να αποδείξετε ότι $h(1)>0$

A_3) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2^x+x$

B_1) Να αποδείξετε ότι η f είναι **γνήσια αύξουσα.**

B_2) Να βρείτε το **πεδίο τιμών** της f

B_3) Να βρείτε το **πλήθος** των **ριζών** της f

4.5 Έστω η $f/\mathbf{R}$ ώστε $f(x)+f(y)=f(x\cdot y)$ για κάθε $x,y\in\mathbf{R}_+^*$ με $f(\mathbf{R}_+^*)=\mathbf{R}$

Η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ και επίσης δίνεται ότι $f(e)=1$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$ και ότι $f\left(\frac{1}{e}\right)=-1$

Β) Να αποδείξετε ότι η f είναι **συνεχής** στο $\mathbf{R}_+^*$

Γ) Αν η f είναι **γνήσια μονότονη**, Γ_1) να αποδείξετε ότι είναι **γνήσια αύξουσα**

Γ_2) και να **βρείτε** τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4.6 Έστω η συνεχής συνάρτηση f ώστε $x^2+f^2(x)=4$

Ξέρουμε ότι η f έχει δύο ρίζες

A_1) Να βρείτε τις **ρίζες** της συνάρτηση f

A_2) Να βρείτε το **ευρύτερο** υποσύνολο του $\mathbf{R}$, στο οποίο ορίζεται η f

Β) Έστω ότι είναι και $f(0)>0$

B_1) Να αποδείξετε ότι $f(0)=2$

B_2) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f, διατηρεί **σταθερό πρόσημο** στο $(-2,2)$

B_3) Να **βρείτε** τον τύπο της συνάρτησης f, και να την **παραστήσετε** στο επίπεδο.

4.7 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x+1$

Α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει μία **ρίζα** ρ_1 στο $(-2,-1)$

Β) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ **διαιρείται** με το $x-1$

Γ) Να βρείτε το **πηλίκο** $Q(x)$ αυτής της διαίρεσης.

Δ) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει και μία **ρίζα** ρ_2 στο διάστημα $(0,1)$

Ε) Αν τώρα ξέρουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει **ακριβώς 3 ρίζες**

να βρείτε το **πρόσημο** της τιμής του $P(x)$, στο κέντρο $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ του $[\rho_1,\rho_2]$

Διαφορικός λογισμός

5.1 Έστω η πραγματική συνάρτηση $\Phi(x) = \begin{cases} f^3(x) - 1 & \text{αν } x < 0 \\ 3f^2(x) - 3f(x) & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

Ξέρουμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο R και η Φ είναι **συνεχής** στο R

Α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $\Phi(0) = 1$

Β) Να αποδείξετε ότι $\Phi'(0) = 3f'(0)$

Γ) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f, Φ στα σημεία του $y'y$, απ' όπου διέρχονται είναι **παράλληλες**, να προσδιορίσετε τις **εφαπτόμενες**.

5.2 Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f

Η ευθεία $(\varepsilon): y = x$, **εφάπτεται** της C_f, στο σημείο $O(0, 0) \in C_f$

Έστω η συνάρτηση g, ώστε $f(x) = xg(x) - 1 + \sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in R$ με $g(0) = 1$

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι **συνεχής** στο R

Β) Αν η g είναι και **παραγωγίσιμη** στο R και η g' είναι **συνεχής** να αποδείξτε ότι η f είναι 2 φορές **παραγωγίσιμη** στο 0, με $f''(0) = 2g'(0) - 1$

5.3 Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + \Gamma x + 3$

με **ρίζες** τους αριθμούς $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < 0$ και $A, B, \Gamma \in R$, $A \neq 0$

Θεωρούμε γνωστό ότι το πολυώνυμο γράφεται και $P(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$

Α) Να αποδείξετε ότι $P'(\rho_1) \neq 0, P'(\rho_2) \neq 0, P'(\rho_3) \neq 0$

Β) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{1}{x - \rho_1} + \dfrac{1}{x - \rho_2} + \dfrac{1}{x - \rho_3}$ για κάθε $x \geq 0$

Γ) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P'(x)$, έχει **2 άνισες ρίζες** και ότι $B^2 > 3A\Gamma$

Δ) Έστω και η συνάρτηση $\Phi(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ ορισμένη στο R_+

Να αποδείξετε ότι $\Phi'(x) < 0$ και μετά ότι $P''(0)P(0) < (P'(0))^2$ ®

5.4 Για την **πολυωνυμική** συνάρτηση f ισχύει $f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1,1\}$

Α) Να γράψετε, τις **πιθανές ρίζες** των εξισώσεων $f(x) = 0$ και $f'(x) = 0$

Β) Να αποδείξετε ότι η f έχει το **πολύ μία ρίζα**
και η f' έχει **τουλάχιστον** μία **ρίζα**.

Γ) Να αποδείξετε ότι η C_f
αποκλείεται να **εφάπτεται** του $x'x$, σε περισσότερα από ένα σημεία.

Δ) Αν τώρα η C_f **εφάπτεται** του $x'x$, η f'' θα έχει **τουλάχιστον μία ρίζα**.

5.5 Έστω ότι $f(x) - 2f'(x) + f''(x) = e^x$, για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 1$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f'(x) - f(x)$ με $g(0) = 0$ και η συνάρτηση $h(x) = \frac{g(x)}{e^x} - x$

Α) Να αποδείξετε ότι $h(x) = 1$

Β) Να βρείτε τη συνάρτηση g

Γ) Αφού βρείτε την παράγωγο $\left(f(x)e^{-x}\right)'$, να βρείτε τη συνάρτηση f

5.6 Έστω η f / R ώστε $f(x) + f(y) = f(xy)$ για κάθε $x, y > 0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(0) = 1$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$

Β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

Γ) Να **βρείτε** την f

5.7 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 - x}{x^2 - 1}$, με $\alpha \in R$

ώστε το διάγραμμα C_f να έχει ως **ασύμπτωτη** στο $+\infty$, την ευθεία $y = 1$

Α) Να βρείτε τον α

Β) Να αποδείξετε ότι το διάγραμμα C_f έχει **μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη**.

Γ) Να αποδείξετε ότι η C_F, της $F(x) = xf(x)$ έχει στο $+\infty$, **ασύμπτωτη** ευθεία την οποία και να **προσδιορίσετε**.

Δ) Να αποδείξετε ότι η C_G, της συνάρτησης $G(x) = F(x) - x$, δέχεται στο $+\infty$ **οριζόντια ασύμπτωτη** την οποία και να **προσδιορίσετε**.

Ε) Να **βρείτε** τον μ, ώστε η C_H, της συνάρτησης $H(x) = \frac{F(x) = x + \mu x + 2\mu}{xF(x) = 2x^2 + \mu x + 1}$

να δέχεται στο $+\infty$, **ασύμπτωτη** τον άξονα $x'x$

5.8 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{αν } x \geq 1 \\ e^{x-1} & \text{αν } x < 1 \end{cases}$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι **συνεχής** στο R

Β) Να βρεθούν τα **κρίσιμα σημεία** της f

Γ) Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$

Δ) Να μελετήσετε την f ως προς τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα**.

5.9 Να εξετάσετε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 23$, $x \in \Delta = [0,5]$ ως προς τα **ολικά ακρότατα**.

5.10 Έστω η **2** φορές **παραγωγίσιμη** συνάρτηση f

Α) Αν $f^2(x) + 2f(x) = x^4 + x^2 + 3$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση f έχει **ακρότατο**, να βρεθεί η **θέση** του **ακρότατου**.

Β) Αν ξέρουμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα **κοίλα κάτω**, να βρεθεί η **τιμή** του.

5.11 Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$

Α) Να αποδείξετε ότι η C_f **δεν δέχεται ασύμπτωτες** ευθείες.

Β) Να **μελετήσετε** την f ως προς τη **μονοτονία**.

Γ) Να αποδείξετε ότι το **σύνολο τιμών** της είναι το $f(R) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$

Δ) Να αποδείξετε ότι η f έχει **μοναδική ρίζα** την **προφανή**.

Ε) Να αποδείξετε ότι η f **δεν αντιστρέφεται**.

Ζ) Να **μελετήσετε** τη συνάρτηση f ως προς την **καμπυλότητα**.

Η) Να την **παραστήσετε** πρόχειρα στο επίπεδο.

5.12 Έστω η **2** φορές παραγωγίσιμη στο R, συνάρτηση f

ώστε $f'(0) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Α) Να **μελετήσετε** την f ως προς τη **μονοτονία** και τα **ακρότατα**.

Β) Έστω και η συνάρτηση $F(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$

B_1) Να **μελετήσετε** τη συνάρτηση F, ως προς τα **ακρότατα** και τις **καμπές**.

B_2) Να **βρείτε** το **σύνολο τιμών** της $F(R)$

B_3) Να **αποδείξετε**, ότι η F έχει **μοναδική ρίζα** x_o, ώστε $-2 < x_o < 2$

Ολοκληρωτικός λογισμός

6.1 Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$

την ορισμένη και συνεχή στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = 2\alpha\beta - 2\beta^2$

και τη συνάρτηση $g(x) = 2x + \frac{1}{x}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$, με $x \in (0,+\infty)$

Α) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$
ώστε η **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της g στο $M_o(x_o, g(x_o))$
να είναι **παράλληλη** στον άξονα $x'x$

Β) Να αποδείξετε ότι $g(x_o) = 4x_o + f(x_o)$

6.2 Έστω η συνεχής και **περιττή** στο R συνάρτηση f

Α) Να αποδείξετε ότι $\int_{-x}^{x} f(x)\,dt = 0$ για κάθε $x \in R$

Β) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu^{51}x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^{51}x\,dx = 0$

6.3 Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο R

που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in R$

Α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \le f'(5)(x-3) + f(3)$ για κάθε $x \in [3,5]$

Β) Να αποδείξετε ότι $\int_{3}^{5} f(x)\,dx \le 2f'(5) + 2f(3)$

6.4 Έστω η συνεχής στο $D = [0,2]$ συνάρτηση f με $f(D) = [0,2]$

Α) Να αποδείξετε ότι η f **δεν** είναι **σταθερή** και ίση με 2

Β) Να **αποδείξετε** ότι $\int_{0}^{2} f(t)\,dt < 4$

Γ) Να **αποδείξετε** η εξίσωση $\int_{0}^{x} f(t)\,dt - 4x = -1$ έχει μοναδική λύση $x_o \in (0,2)$

Δ) Να **βρείτε** τον αριθμό x_o του προηγούμενου ερωτήματος
αν το **εμβαδόν** του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f
τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = x_o$ είναι 3 τ.μ.

Ε) Να **αποδείξετε** ότι $4x > \int_{0}^{x} f(t)\,dt$ για κάθε $x \in (0,2)$

6.5 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{αν } x<1 \\ \alpha\dfrac{\ln x}{x}+e & \text{αν } x\geq 1 \end{cases}$ με $\alpha \geq e$

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι **συνεχής**.

Β) Να υπολογίσετε το α, ώστε το **εμβαδόν** του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=e$, να ισούται με $e^2+\dfrac{1}{e}$ τ.μ.

6.6 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-3x$, με $x>0$

Α) Να βρείτε τα διαστήματα **μονοτονίας** της f

Β) Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 3-\dfrac{e^2}{x}$, για κάθε $x>0$

Γ) Να βρείτε το **εμβαδόν** του **χωρίου** που περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=e$

6.7 Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_{\frac{1}{4}}^{x}\dfrac{t+\ln t}{1+t^2}dt$

Α) Να **βρείτε** το **πεδίο ορισμού** της F

B_1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x+\ln x$ έχει **μοναδική ρίζα** η οποία μάλιστα βρίσκεται στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

B_2) Να **αποδείξετε** ότι η συνάρτηση F' έχει **μοναδική ρίζα** $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

$Γ_1$) Να **βρείτε** το **πρόσημο** της F' στα διαστήματα $(0,\xi)$ και $(\xi,+\infty)$

$Γ_2$) Να **αποδείξετε** ότι $F(x)-F\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln x$ με $x>0$

$Γ_3$) Να **αποδείξετε** ότι η εξίσωση $F(x)=0$, εκτός της **προφανούς ρίζας** $\dfrac{1}{4}$ έχει μόνο μία **ακόμη ρίζα** x_o, η οποία μάλιστα βρίσκεται στο $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

Διαδικαστικά Θέματα για εξάσκηση σε κάθε κεφάλαιο

Β.ΔΙΚΑΙΟΥΛΑΚΟΣ

Απαγορεύεται αυστηρά η χρήση του εκπαιδευτικού υλικού εκτός του φροντιστηρίου

Κατεύθυνση Γ΄Λυκείου

1. Μιγαδικοί αριθμοί

1.1 Α$_1$) Α$_2$)

Β) 0

Γ) $A = 2$, $B = -1$

Δ)

Ε$_1$) $K\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και $\rho = 1$ Ε$_2$) $z = -1 + 3 \cdot i$

1.2 Α)

Β) $|z| = 1$

Γ)

Δ)

Ε)

Ζ)

1.3 Α)

Β) $120°$, $30°$, $30°$

Γ)

Δ)

Ε)

1.4 Α)

Β)

Γ) $\Pi_v = -2, 0, 2$

1.5 Α)

Β)

Γ$_1$) Γ$_2$) $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ Γ$_3$) $\Pi = -2$ Γ$_4$)

1.6 Α$_1$) Α$_2$)

Β$_1$)

Γ$_1$) Γ$_2$) $z = \frac{3}{5} - \frac{3}{10} \cdot i$

1.7 Α$_1$) Α$_2$)

Β$_1$) Β$_2$) Β$_3$) Β$_4$) Β$_5$)

2. Κλασική ανάλυση

2.1 A_1) A_2) A_3)

B_1) B_2) $\Pi = 0$ B_3) $x = 2$

2.2 A_1)

A_2)

A_3)

B_1) B_2) B_3) 0,2

2.3 A)

B)

Γ)

Δ)

2.4 A_1) A_2) A_3)

B_1) B_2) B_3)

Γ_1) Γ_2)

2.5 A_1) $(-1,1)$ A_2) $f_1(x) = \ln x$, $f_2(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

A_3) A_4) A_5) $f(0) = 0$ A_6) A_7)

A_8) $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

B) $(f \circ g)(x) = x$

2.6 A)

B)

Γ)

Δ) $x = -3,3$

E) $-3 < x < 3$

1. Όρια

3.1 A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Γ) $\lim\limits_{x\to\frac{\lambda\sqrt{5}}{5}} \left(\dfrac{f(x)}{5x-\lambda\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{1}{3}$

3.2 $A_1)$ $\alpha = 0$ και $L_1 = -1$ $A_2)$ $\beta = 2$ και $L_2 = -\dfrac{3}{2}$

$B_1)$ $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x)}{x+1} = -\infty$ $B_2)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right) = -2$

3.3 $A_1)$ $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ $A_2)$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ $A_3)$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f^2(x)}{x} = 0$

B) $\lim\limits_{x\to0} (f(x)\cdot g(x)) = 0$

$\Gamma_1)$ $\Gamma_2)$ $\lim\limits_{x\to0} g(x) = -\infty$

3.4 $A_1)$ $A_2)$ $3)$ $P(x) = x + 6$

B) $\alpha = 6$ και $\beta = 1$

4. Συνέχεια

4.1 Α) $f(0) = 0$

Β)

Γ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)\,g(x)}{x} = 4$

Δ)

4.2 A_1) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha + 10 = f(2)$ A_2) $\alpha = -3$, $\beta = 0$

B_1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ B_2)

4.3 A_1) $\alpha = 0$ A_2) $f(0) = 0$ A_3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2} - 1 & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

B_1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$ B_2)

4.4 A_1) A_2) A_3)

B_1) B_2) $\mathbb{R}$ B_3) 1 ρίζα

4.5 Α)

Β) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Γ)

4.6 A_1) -2 , 2 A_2) $[-2,2]$

B_1) B_2)

B_3) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Το διάγραμμα είναι το ημικύκλιο $(\kappa) : x^2 + y^2 = 2^2$, $y \geq 0$

4.7 Α)

Β)

Γ) $Q(x) = x^2 + x - 1$

Δ)

Ε) $P\left(\dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}\right) > 0$

5. Διαφορικός Λογισμός

5.1 Α)

Β)

Γ) $(\varepsilon_\Phi): y = 0$ και $(\varepsilon_f): y = 1$

5.2 Α)

Β)

5.3 Α)

Β)

Γ)

Δ)

5.4 Α) -1 και 1

Β)

Γ)

Δ)

5.5 Α) $h(x) = 1$

Β) $g(x) = xe^x$

Γ) $f(x) = \frac{1}{2}e^x x^2 + e^x$

5.6 Α)

Β)

Γ) $f(x) = \ln x$

5.7 Α) $\alpha = 1$

Β) $(\delta) : x = -1$

Γ) $(\varepsilon) : y = x - 1$

Δ) $(\zeta) : y = -1$

Ε) $\mu = 0$

5.8 Α)

Β) 0 και 1

Γ)

Δ) Είναι γνήσια αύξουσα στο **R**

5.9 $f(R) = [-23,22]$

5.10 Α) $x_o = 0$

Β) $f(0) = -3$

5.11 Α)

Β) Είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ και **γνήσια φθίνουσα** στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$

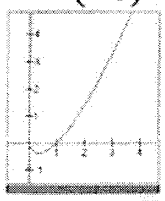
Γ)

Δ)

Ε)

Ζ) Είναι **κυρτή** στο **R**

Η) Είναι προφανής ο πίνακας.



5.12

Α) Η **f** είναι **γνήσια αύξουσα** στο **R**
και συνεπώς η συνάρτηση **f** δεν θα έχει **ακρότατα**.

B_1) Η **F** στρέφει τα **κοίλα κάτω** στο $(-\infty,0)$
και τα **κοίλα πάνω** στο $(0,+\infty)$

B_2) $F(R) = (-\infty,+\infty)$

B_3) Η **F** έχει μοναδική **ρίζα**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
F''	−	0	+
F	⌒		⌣

6. Ολοκληρωτικός Λογισμός

6.1 Α)
Β)

6.2 Α)
Β)

6.3 Α)
Β)

6.4 Α)
Β)
Γ)
Δ) $x_o = 1$
Ε)

6.5 Α)
Β) $\alpha = e$

6.6 Α)
Β)
Γ) $\frac{5e^2 - 7}{4}$

]

6.7 Α) $(0,+\infty)$
B_1) B_2)
Γ_1) $F'(x) > 0$ για $x > \xi$ Γ_2) Γ_3)
Δ) $L = 0$