Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
τηλ.: 27210 86210, fax.: 27210 62938, Κιν.: 6944 522 61
www.dikaioulakos.gr - e-mail: basdik@otenet.gr

Κριτήρια 6

3 ώρες

Αξιολόγηση

Ημερομηνία: - -

Επαναληπτικό 3

Όνομα:.. ***Βαθμός*** :

1^o Θέμα

Α Έστω **f** μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα **Δ**
Αν **F** είναι μια **παράγουσα** της **f** στο **Δ**
τότε όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$ με $c \in R$
είναι **παράγουσες** της **f** στο **Δ**
και κάθε **άλλη παράγουσα G** της **f** στο **Δ** παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$
(7 μονάδες)

Β *Απαντήστε τα παρακάτω θέματα*

Β₁ Να αναφέρετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση **f** είναι **συνεχής** σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της
και πότε λέμε ότι μια συνάρτηση **f** είναι **συνεχής** στο **διάστημα Δ**

Β₂ Πότε μία ευθεία $x = x_0$
λέγεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** ευθεία του διαγράμματος μιας συνάρτησης f ;

Β₃ Έστω η **παραγωγίσιμη** στο διάστημα **[α,β]** συνάρτηση **f**
Τι δηλώνει γεωμετρικά το **Θεώρημα Μέσης Τιμής** του Διαφορικού Λογισμού
για τη συνάρτηση **f** στο διάστημα **[α,β]** ;
(9 μονάδες)

Γ) *Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος*

Γ₁ ☐ Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε **f(x)>0** *για κάθε* **x** *από το πεδίο ορισμού της* **f**

Γ₂ ☐ Αν **υπάρχουν** τα **όρια** των συναρτήσεων **f** και **g** στο x_0
και είναι **πεπερασμένα** ,θα ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

Γ₃ ☐ Αν η συνάρτηση **f** είναι **συνεχής** στο διάστημα **[α,β]**
και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(x_0)=0$ τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει: $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$
(9 μονάδες)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.
Β. ΔΙΚΑΙΟΥΛΑΚΟΣ
Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
τηλ.: 27210 86210, fax.: 27210 62938, Κιν.: 6944 522961
www.dikaioulakos.gr - e-mail: basdik@otenet.gr

Κριτήρια

2^0 Θέμα

Έστω ο αριθμός $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου **z** μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$

α) Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$ να αποδείξετε ότι ο **z** είναι **πραγματικός** αριθμός. (6 μονάδες)

β) Αν $|f(z)| = 1$ να βρεθεί ο **γεωμετρικός τόπος** των εικόνων του **z** (9 μονάδες)

γ) Αν $\mathrm{Re}(f(z)) = 2$ να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού **z** βρίσκονται σε **κύκλο** τον οποίο και να προσδιορίσετε. (10 μονάδες)

3^0 Θέμα

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ συνάρτηση f

ώστε: $f^2(x) + x^2 = 2xf(x) + \ln^2(x-1)$ και $(x-1)f'(x) = x - 2$ ...για κάθε $(1,+\infty)$

α) Να βρείτε την **εφαπτόμενη** της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$ (5 μονάδες)

β) Να βρείτε τον **τύπο** της συνάρτησης **f** (8 μονάδες)

γ) Να βρείτε το **σύνολο τιμών** της **f** (7 μονάδες)

δ) Να αποδείξετε ότι: $\ln(e-1) < e - 2$ (5 μονάδες)

4^0 Θέμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$

και έστω **(ε)** η **εφαπτόμενη** της C_f στο σημείο της $M(2\alpha, 8\alpha^2)$ ...με $\alpha>0$

Α) Να βρείτε το **εμβαδόν** του χωρίου
που περικλείεται απ΄ την γραφική παράσταση **C** την ευθεία **ε** και τον άξονα **y΄y**
(10 μονάδες)

Β) Έστω τώρα **θ** η **γωνία** που σχηματίζει η **ΜΟ** με την **(ε)**
Να **εκφράσετε** την **εφθ** σε συνάρτηση του α
και να **βρείτε** τη **μέγιστη τιμή** της **εφθ** ...*όταν το α μεταβάλλεται.* (15 μονάδες)

Καλή επιτυχία !

Αξιολόγηση 3

1ο θέμα

Α) Απόδειξη
Κάθε συνάρτηση G της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$
Είναι μια παράγουσα της f στο Δ
αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$
Έστω τώρα G μια άλλη παράγουσα της G στο Δ
Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν: $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$
Άρα $F'(x) = G'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$
Δηλαδή: $G(x) = F(x) + c$, $c \in R$, για κάθε $x \in \Delta$

Β1) Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Η f είναι συνεχής στο Δ όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του Δ

Β2) Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$
Τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

Β3) Γεωμετρικά το θεώρημα μέσης τιμής
δηλώνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$
ώστε η εφαπτομένη της Cf στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην AB

Γ1) Λ

Γ2) Σ

Γ3) Λ

2° θέμα

α) 1^{ος} τρόπος

Έστω $f(z) = \dfrac{z+i}{z}, \quad z \in C^*$

Είναι: $\left|\dfrac{z+i}{z}\right| = \left|\dfrac{\bar{z}+i}{\bar{z}}\right|$

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{z+i}{z}\right|^2 = \left|\dfrac{\bar{z}+i}{\bar{z}}\right|^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{z+i}{z}\dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}i}{\bar{z}}\dfrac{z-i}{z}$

$\Leftrightarrow z\bar{z} - iz + i\bar{z} - i^2 = \bar{z}z - i\bar{z} + iz - i^2$

$\Leftrightarrow 2iz - 2iz = 0 = 2i(z - \bar{z}) = 0$

$\Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$

$\Leftrightarrow 2Imz)i = 0 \Leftrightarrow Im(z) = 0$ και άρα $z \in R$

2^{ος} τρόπος

Αν $z = x + yi$

τότε $f(z) = \dfrac{x + yi + i}{x + yi} = \dfrac{(x + (y+1)i)(x - yi)}{(x + yi)(x - yi)}$

$= \dfrac{x^2 - xyi + xyi + xi - y^2i^2 - yi^2}{x^2 + y^2}$

$= \dfrac{x^2 + y^2 + y}{x^2y^2} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}i$

$f(\bar{z}) = \dfrac{x - yi + i}{x - yi} = \dfrac{(x + (1-y)i)(x + yi)}{(x - yi)(x + yi)}$

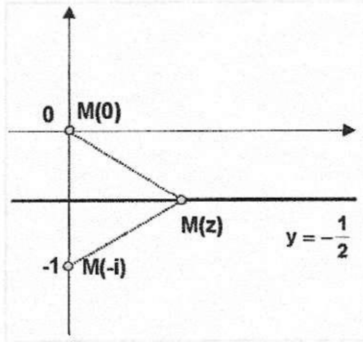
$= \dfrac{x^2 + xyi + xi - xyi + yi^2 - y^2i^2}{x^2 + y^2}$

$= \dfrac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}i$

Από $f(z) = f(\bar{z}) = \dfrac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + y^2} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}i = \dfrac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}i$

$\Leftrightarrow y = -y \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ και άρα $z = x \in R$

β) 1ος τρόπος



$|f(z)| = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z+i}{z}\right| = 1$

$\Leftrightarrow \frac{|z+i|}{|z|} = 1$

$\Leftrightarrow |z+i| = |z|$

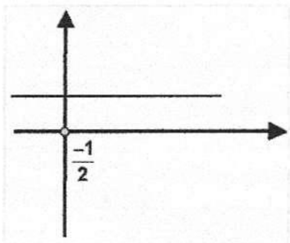
$\Leftrightarrow |z-(-i)| = |z-0|$

Δηλαδή οι εικόνες των z ισαπέχουν από τις εικόνες των μιγαδικών $-i$ και 0
Οπότε ανήκουν στην μεσοκάθετη ευθεία του τμήματος **ΑΟ** με $A(0,-1)$ και $O(0,0)$

Οπότε ανήκουν στην ευθεία $y=-\frac{1}{2}$ η οποία εκφράζει και τον γεωμετρικό τόπο.

2ος τρόπος

Από $|f(z)| = 1$



$\Leftrightarrow \left|\frac{z+i}{z}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |z+i| = |z|$

$\Leftrightarrow |x+(y+1)i| = |x+yi|$

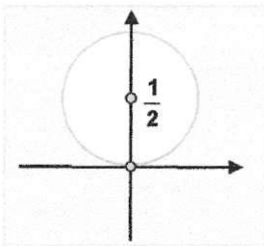
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1 = x^2+y^2$

$\Leftrightarrow y = \frac{-1}{2}$

Οπότε $M(z) \equiv (x,-\frac{1}{2})$ και ο γεωμετρικός τόπος είναι η ευθεία $(\varepsilon): y=\frac{-1}{2}$

γ) Από $Re(f(z)) = 2$



καταλήγουμε στη σχέση $\frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} = 2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+y = 2x^2+2y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-y = 0$

$\Leftrightarrow (\kappa): (x-0)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Οπότε τα σημεία κινούνται στον πιο πάνω κύκλο (…εξαιρείται το $O(0,0)$)

3ο θέμα

α) Η σχέση $f^2(x) + x^2 = 2xf(x) + \ln^2(x-1)$

για $x = 2$ δίνει

$f^2(2) + 4 = 4f(2) + \ln^2 1 \Leftrightarrow f^2(2) - 4f(2) + 4 = 0 \Leftrightarrow (f(2)-2)^2 = 0 \Leftrightarrow f(2) = 2$

Η σχέση $(x-1)f'(x) = x-2$

για $x = 2$ δίνει $1f'(2) = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 0$

Συνεπώς η εφαπτόμενη είναι η $(\varepsilon): y - f(2) = f'(2)(x-2)$ ή $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

β) Είναι $f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{x-2}{x-1}dx = \int \frac{x-1-1}{x-1}dx = \int 1 - \frac{1}{x-1}dx$

$$= \int 1dx - \int \frac{1}{x-1}dx = x - \int \frac{1}{y}d(y+1) = x - \int \frac{1}{y}dy$$

$x - 1 = y$

$\Leftrightarrow x = y + 1$

$$= x - \ln|y| + c = x - \ln|x-1| + c$$

Από $f(2) = 2$ έχουμε: $2 = 2 - \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Οπότε $f(x) = x - \ln|x-1)$

γ) Είναι φανερός ο διπλανός πίνακας μεταβολών

x	1		2	e
f′		-	0	+
f		↘		↗

Ολικό ελάχιστο $f(2) = 2$

Το πεδίο τιμών της είναι το $[2, +\infty)$

δ) Από $e > 2 \overset{f2\uparrow}{\Leftrightarrow} f(R) > f(2) \Leftrightarrow e - \ln(e-1) > 2 \Leftrightarrow \ln(e-1) < e - 2$