ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.
Β. ΔΙΚΑΙΟΥΛΑΚΟΣ
Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
τηλ.: 27210 86210, fax.: 27210 62938, Κιν.: 6944 522961
www.dikaioulakos.gr - e-mail: basdik@otenet.gr

Κριτήρια 4

3 ώρες **Αξιολόγηση**

Ημερομηνία: - -

Επαναληπτικό 2

Όνομα: ....   **Βαθμός**:

1^ο Θέμα

Α₁ Εστω μια συνάρτηση **f** **παραγωγίσιμη** σε ένα διάστημα **Δ**
Αν $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του **Δ**
να αποδείξετε ότι η **f** είναι **σταθερή** σε όλο το διάστημα **Δ** (5 μονάδες)

Α₂ Αν η **f** είναι ορισμένη στο **R** , η **f′** είναι ορισμένη στο R^* και $f'(x)=0$
τι συμπεραίνετε για τη συνάρτηση **f** ; (2 μονάδες)

Α₃ Να βρείτε τη συνάρτηση **f**
αν $f'(x)=0$ για κάθε $x \in R^*$ και **f(1)=2004 , f(-1)=2004 , f(0)=2004** (3 μονάδες)

Β Για τη συνάρτηση **f** ισχύουν $f''(x)-f(x)=0$ για κάθε $x \in R$ και $f(0)=f'(0)$
Να αποδείξετε ότι
Β₁ η συνάρτηση $g(x)=[f(x)]^2-[f'(x)]^2+2004$ είναι **σταθερή**. (3 μονάδες)
Β₂ και μάλιστα είναι **g(x)=2004** για κάθε $x \in R$ (2 μονάδες)

Γ ☐ **Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος**

Αν για τη συνάρτηση **f** είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$
τότε **ή** θα είναι $f'(x)>0$ και η **f** θα είναι **γνησίως αύξουσα** στο **R**
ή θα είναι $f'(x)<0$ και η **f** θα είναι **γνησίως φθίνουσα** στο **R** (4 μονάδες)

Δ₁ Εστω η **παραγωγίσιμη** σε ένα διάστημα **Δ** ,συνάρτηση **f**
Αν $f'(x)>0$ είναι γνωστό ότι η συνάρτηση **f** είναι **γνήσια αύξουσα**.
Το αντίστροφο ισχύει ; (3 μονάδες)

Δ₂ Αν $f'(x) \geq 0$ τι συμπεραίνετε για τη **μονοτονία** της **f** ; (3 μονάδες)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.
Β. ΔΙΚΑΙΟΥΛΑΚΟΣ
Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
τηλ.: 27210 86210, fax.: 27210 62938, Κιν.: 6944 522961
www.dikaioulakos.gr - e-mail: basdik@otenet.gr

2° Θέμα

● Έστω στο σύνολο των μιγαδικών η εξίσωση $z^2 - 2z\sigma\upsilon\nu\theta + 1 = 0$ ...με **0<θ<π** και **ρίζες** τις z_1, z_2

και ο αριθμός $w = z_1 + i\dfrac{1}{z_2}$,όπου z_1 εκείνη η ρίζα με **φανταστικό** μέρος **θετικό**.

α) Να αποδείξετε ότι $z_1 z_2 = 1$ (15 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου **θ**
οι **εικόνες** των μιγαδικών **w** ,**κινούνται** στον **κύκλο (κ)**:$x^2 + y^2 = 2$ (10 μονάδες)

3° Θέμα

● Έστω η **πολυωνυμική** συνάρτηση **f** με $f(0) \neq 0$ και $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x))\,\eta\mu x\, dx = 0$

Να αποδείξετε ότι

Α) $f(0) + f(\pi) = 0$ (15 μονάδες)

και μετά ότι η συνάρτηση **f** έχει μία **τουλάχιστον ρίζα** στο $(0, \pi)$ (5 μονάδες)

Β) Ότι η εξίσωση $f(x) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2} f'(x)$ έχει μία **τουλάχιστον ρίζα** στο $(0,\pi)$

(5 μονάδες)

4° Θέμα

● Δίνονται οι πολυωνυμικές συναρτήσεις **f,g** με $f'(x) - g'(x) = 2$ και $f(1)=g(1)$

Έστω ότι η εξίσωση **f(x)=0** έχει δύο λύσεις τις ρ_1 , ρ_2 με $\rho_1 < 1 < \rho_2$

A_1) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση **g(x)=0** έχει μια **λύση** στο (ρ_1, ρ_2) (3 μονάδες)

A_2) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** ένας $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε: $g'(\xi) = -2$ (3 μονάδες)

Β) Αν $g''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και η C_g στρέφει τα **κοίλα πάνω** στο **R**

B_1) να αποδείξετε ότι η **f ΄** είναι **γνησίως αύξουσα** στο **R**

B_2) να αποδείξετε ότι η **f** έχει **ολικό ελάχιστο** στο σημείο **ξ** ...*του* A_2 (9 μονάδες)

Γ) Έστω ότι η ευθεία **(δ): y=3x-7** είναι **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$

Να αποδείξετε ότι η **(ε): y=x-5** είναι **ασύμπτωτη** της C_g στο $+\infty$ (7 μονάδες)

Δ) Να υπολογίσετε
το **εμβαδόν** του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g και τον άξονα **y΄y** (3 μονάδες)

Καλή επιτυχία !

Αξιολόγηση 2

1° θέμα

A₁) Για να αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$

Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$

Αν $x_1 < x_2$ τότε το διάστημα $[x_1, x_2]$: $f/[x_1, x_2]$: συνεχής

$f/(x_1, x_2)$: παραγωγίσιμη

Άρα ισχύει για την f το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_1, x_2]$

Συνεπώς υπάρχει $\rho_1 \in (x_1, x_2)$ ώστε $f'(\rho_1) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Όμως ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$,οπότε $f'(\rho) = 0$,δηλαδή $f(x_2) = f(x_1)$

Αν $x_1 > x_2$ εργαζόμαστε ομοίως!

Άρα η f είναι σταθερή

A₂) $f'(x) = 0$ με $A_{f'} = R^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Η f΄ είναι ίση με μηδέν σε ένωση διαστημάτων και όχι σε διαστήματα.
Συνεπώς το μόνο που συμπεραίνουμε με σιγουριά
είναι ότι η f είναι σταθερή στα επιμέρους διαστήματα.

A₃) $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Άρα η $f(x) = c_1$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $f(x) = c_2$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Όταν $x \in (-\infty, 0)$ είναι $f(x) \equiv f(-1)$ ή $f(x) = 2004$

$x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) \equiv f(1)$ ή $f(x) = 2004$

$x = 0$ είναι $f(0) = 2004$

Άρα $f(x) = 2004 / R$

B₁) $g(x) = f^2(x) - [f'(x)]^2 + 2004$: παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων.

$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f'(x) \cdot f''(x) = 2f'(x) \cdot [f(x) - f''(x)] = 0$

Συνεπώς η g είναι σταθερή.

B₂) Είναι $g(x) \equiv g(0) = f^2(0) - [f'(0)]^2 + 2004 = 2004 \;\; / R$

Γ₁) Λάθος

Δ₁) Το αντίστροφο δεν ισχύει.
Αν η f είναι γνήσια αύξουσα, τότε γενικά είναι $f'(x) \geq 0$

Δ₂) Αν $f'(x) \geq 0$ τότε η f μπορεί να είναι είτε γνήσια αύξουσα, είτε σταθερή είτε και τα δύο ανά διαστήματα.

2ο θέμα

α) 1ος τρόπος

Θα λύσουμε την εξίσωση $z^2 - 2z\sigma\upsilon\nu\theta + 1 = 0$ ....αφού $\theta \in (0, \pi)$

Άρα $z_1, z_2 = \dfrac{z\sigma\upsilon\nu\theta \pm i\eta\mu\theta}{2} = \left| \begin{array}{l} z_1 = \sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta i \\ z_2 = \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta i \end{array} \right.$

$z_1 \cdot z_2 = [\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta\, i] \cdot [\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta\, i] = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$

2ος τρόπος

Είναι γνωστό ότι το γινόμενο των ριζών $z_1 \cdot z_2$ ισούται με $z_1 \cdot z_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{1}{1} = 1$

β) 1ος τρόπος

$$w = z_1 + i\frac{1}{z_2}$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta + i\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta} = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta + \frac{i \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)}{(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta)(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)}$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta + i\frac{\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta + i\eta\mu^2\theta} = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta + \frac{i\sigma\upsilon\nu\theta + i^2\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta + i\eta\mu^2\theta}$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta = (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta) + (\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)i$$

Οπότε $|w| = \sqrt{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)^2}$

$$= \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu^2\theta} = \sqrt{2}$$

Οπότε $M(w) \in (\kappa): x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$

2ος τρόπος

Είναι $|w| = |z_1 + i\dfrac{1}{z_2}| = |z_1 + iz_1| = |z_1(1+i)| = |z_1||1+i| = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Να παρατηρήσουμε ότι από το γεγονός ότι $z_2 = \overline{z_1}$ και $z_1 z_2 = 1$

θα είναι και $\dfrac{1}{\overline{z_1}} = z_1$ ή $1 = z_1\overline{z_1}$ ή $1 = |z_1|^2$ ή $1 = |z_1|$

3° θέμα

Α) $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)\,\eta\mu x\,dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\,\eta\mu x\,dx + \int_0^{\pi} f''(x)\,\eta\mu x\,dx = 0$

$\Leftrightarrow -\int_0^{\pi} f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'\,dx + \int_0^{\pi} (f'(x))'\cdot\eta\mu x\,dx = 0$

$\Leftrightarrow -\left[f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx + [f'(x)\,\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx = 0$

$\Leftrightarrow -[f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = 0$

$\Leftrightarrow f(0) + f(\pi) = 0$

Η f συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πολυωνυμική.
$f(0)\cdot f(\pi) = f(0)\cdot(-f(0) = -f^2(0) < 0$ ....αφού $f(0) \neq 0$

Άρα ισχύει για την f το θεώρημα Bolzano στο $[0,\pi]$
Συνεπώς υπάρχει $\rho \in (0,\pi)$ ώστε $f(\rho) = 0$

Β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)f'(x)$

Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

και $g(0)\cdot g(\pi)$
$= [f(0) - \eta\mu 0\cdot\sigma\upsilon\nu 0\cdot f'(0)]\cdot[f(\pi) - \eta\mu\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\pi\cdot f'(\pi)] = f(0)\cdot(-f(0) = -f^2(0) < 0$

Άρα ισχύει για τη g το θεώρημα Bolzano στο $[0,\pi]$

Συνεπώς υπάρχει $\rho \in (0,\pi)$ ώστε $g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = \eta\mu\rho\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\rho}{2}\right)\cdot f'(\rho)$