ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.
Β. ΔΙΚΑΙΟΥΛΑΚΟΣ
Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
τηλ.: 27210 86210, fax.: 27210 62938, Κιν.: 6944 522961
www.dikaioulakos.gr - e-mail: basdik@otenet.gr

3 ώρες **Αξιολόγηση**

Ημερομηνία: - -

Επαναληπτικό 1

Όνομα:.. ***Βαθμός*:**

1ο Θέμα

Απαντήστε με ένα Σωστό ή Λάθος

Α ☐ Μία συνάρτηση **f:A→R** είναι συνάρτηση **1 – 1**
αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2$ είναι $f(x_1) = f(x_2)$ (4 μονάδες)

Β ☐ Αν μία συνάρτηση **f** είναι **συνεχής** στο σύνολο $\Delta = (-1,0) \cup (0,1)$
και ισχύει $f'(x) = 0$,τότε η **f** είναι **σταθερή** στο **Δ** (3 μονάδες)

Γ ☐ Έστω η συνεχής στο **διάστημα Δ** συνάρτηση **f**
η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ
Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$,η **f** θα είναι **κυρτή** στο **Δ** (3 μονάδες)

Δ ☐ Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση **y=f(x)**
όταν η **f** είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0
ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής** του **y** ως προς το **x** στο σημείο x_0
τον παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$ (3 μονάδες)

Ε ☐ Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων **f** και **g** στο x_0

τότε ισχύει: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$ (4 μονάδες)

Ζ ☐ Αν μια συνάρτηση **f** είναι **κυρτή** σε ένα διάστημα Δ
τότε η **εφαπτομένη** της γραφικής παράστασης της **f** σε κάθε σημείο του Δ
βρίσκεται **«πάνω»** από τη **γραφική** της **παράσταση**. (3 μονάδες)

Η ☐ Για τη συνεχή συνάρτηση **f** είναι: $\int f(x)dx = \int_0^x f(t)\,dt + c$,όπου $c \in R$

(5 μονάδες)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Μ.Ε.
Β. ΔΙΚΑΙΟΥΛΑΚΟΣ
Ανδρέα Σκιά 8, ΚΑΛΑΜΑΤΑ
τηλ.: 27210 86210, fax.: 27210 62938, Κιν.: 6944 522961
www.dikaioulakos.gr - e-mail: basdik@otenet.gr

Κριτήρια

2ο Θέμα

Δίνεται ο μιγαδικός z και ο μιγαδικός w ώστε: $w(1-\bar{z}) = 2 + i\bar{z}$

α) Να αποδείξετε ότι: i) $z \neq 1$ και ii) $w \neq -i$ (4 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{w-2}{w+i}\right| = |z|$ (6 μονάδες)

γ) Αν οι εικόνες $M(z)$ των αριθμών z κινούνται στο **κύκλο** (κ): $x^2 + y^2 = 1$
και $N(x,y)$ είναι οι εικόνες του w
να αποδείξετε ότι τα $N(x,y)$ κινούνται στην **ευθεία** $(\varepsilon): 4x + 2y - 3 = 0$ (5 μονάδες)

δ) Αν τώρα w_0 είναι εκείνος ο μιγαδικός w που έχει το **ελάχιστο μέτρο**
να αποδείξετε ότι αυτός θα είναι ο αριθμός $w_0 = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{10}i$ (10 μονάδες)

3ο Θέμα

Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f
με $f(x+h) = f(h)f(x)e^{hx}$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και $f'(0) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\left[f'(0) + \lim\limits_{h\to 0} xe^{hx}\right]$ (5 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = f(x)\cdot(x+1)$ (5 μονάδες)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^{\frac{x^2+2x}{2}}}$ είναι **σταθερή**. (7 μονάδες)

δ) Να **βρείτε** τη συνάρτηση f (8 μονάδες)

4ο Θέμα

Δίνεται ο **θετικός** αριθμός α και η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2 - 2x\ln x$ με $x \in (0,+\infty)$

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι **κυρτή ή κοίλη**. (8 μονάδες)

β) Να βρείτε την **εφαπτόμενη** της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$
και να προσδιορίσετε το α, ώστε αυτή να διέρχεται από το $O(0,0)$ (7 μονάδες)

γ) Για αυτήν την τιμή του α να δείξετε ότι $f(x) > 2x$ για κάθε $x \in [1,+\infty)$ (5 μονάδες)
και μετά να υπολογίσετε το **εμβαδόν** του χωρίου
που περικλείεται από την **γραφική παράσταση** της f
την **εφαπτόμενη** της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ και την ευθεία $x=e$ (5 μονάδες)

Καλή επιτυχία !

Αξιολόγηση 1

1° θέμα

Α-Λ Β-Λ Γ-Σ Δ-Σ Ε-Λ Ζ-Λ Η-Σ

2° θέμα

α) i) Αν $z = -i$ τότε θα ήταν και $w(1-\bar{1}) = 2+\bar{1}i$ ή $0 = 2+i$ άτοπο

ii) Αν $w = -i$ τότε θα ήταν και $-i(1-\bar{z}) = 2+i\bar{z}$ ή $-i+i\bar{z} = 2+i\bar{z}$ ή $2 = -i$ άτοπο

β) Από $w = \dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$ είναι $\left|\dfrac{w-2}{w+i}\right| = \dfrac{\left|\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}-2\right|}{\left|\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}+i\right|} = \dfrac{\dfrac{|2+i\bar{z}-2+2\bar{z}|}{|1-\bar{z}|}}{\dfrac{|2+i\bar{z}+i-i\bar{z}|}{|1-\bar{z}|}} = \dfrac{|\bar{z}|\cdot|2+i|}{|2+i|} = |z|$

γ) Αν $M(x,y)$ τότε $w = x+iy$ και επειδή $|z| = 1$

είναι διαδοχικά $\left|\dfrac{w-2}{w+i}\right| = 1$ ή $|w-2| = |w+i|$ ή $|2x+iy-2| = |x+iy+i|$

ή $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$ ή $(\varepsilon): 4x+2y-3=0$ ή $y = -2x+\dfrac{3}{2}$

δ) Να τονίσουμε ότι τα σημεία M
κινούνται στη μεσοκάθετη του τμήματος με άκρα τα **A(2,0)** και **B(0,-1)**
στα οποία απεικονίζονται οι μιγαδικοί $z_1 = 2+0i$, $z_2 = 0-i$
Προφανώς ο w με το μικρότερο μέτρο είναι αυτός που έχει εικόνα το σημείο M
που προκύπτει από την τομή της (ε)
και της προς αυτή κάθετη απ' το **O (0,0)** ευθεία (η)
Προφανώς $(\eta): y = \dfrac{1}{2}x$ *...διέρχεται από το O με συντελεστή διεύθυνσης* $\dfrac{1}{2}$
Λύνοντας το σύστημα της (δ) με την (ε)

είναι $(\Sigma): \begin{cases} (\varepsilon): y = -2x+\dfrac{3}{2} \\ (\delta): y = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$ $\begin{cases} y = -2x+\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2}x = -2x+\dfrac{3}{2} \end{cases}$ ή $x = \dfrac{3}{5}$ και $y = \dfrac{3}{10}$

Άρα $M\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{3}{10}\right)$ και συνεπώς ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $w_0 = \dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{10}i$

3° θέμα

α) Για $x = h = 0$ είναι $f(0) = f(0)$ ή $f(0) = 1$

1ος τρόπος

Από $f(x+h) = f(h)f(x)e^{hx}$ είναι $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{f(x)f(h)e^{hx} - f(x)}{h}$

Οπότε $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)e^{hx} - e^{hx} + e^{hx} - 1}{h}$

$$= f(x)\left[\lim_{h\to 0} e^{hx} \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{e^{hx}-1}{h}\right] = f(x)\left[f'(0) + \lim_{h\to 0}(xe^{hx})\right]$$

2ος τρόπος

Αν η συνάρτηση f είναι γενικά παραγωγίσιμη

θα μπορούσαμε από $f(x+h) = f(h)f(x)e^{hx}$ παραγωγίζοντας με μεταβλητή το h

να έχουμε $f'(x+h) = f(x)\left[f'(h)\, e^{hx} + xf(h)\, e^{hx}\right]$

Για $h = 0$ είναι: $f'(x) = f(x)[f'(0) + x]$ ή $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\left[f'(0) + \lim\limits_{h\to 0} xe^{hx}\right]$

β)

1ος τρόπος

Από $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)\left[f'(0) + \lim\limits_{h\to 0}(xe^{hx})\right]$ είναι $f'(x) = f(x)(1+x)$

Είναι $g'(x) = \dfrac{f'(x)e^{x^2+2x} - (2x+2)e^{x^2+2x}f(x)}{(e^{x^2+2x})^2} = \dfrac{e^{x^2}+2x}{(e^{x^2+2x})^2}[f'(x) - 2(x+1)f(x)] = 0$

Άρα η g είναι *σταθερή*

Δηλαδή $g(x) \equiv g(0) = \dfrac{f(0)}{e^0} = 1$,οπότε $\dfrac{f(x)}{e^{x^2+2x}} = 1$ ή $f(x) = e^{x^2+2x}$

2ος τρόπος

Επίσης θα μπορούσαμε να βρούμε την f ως εξής:

Από $f'(x) = f(x)(x+1)$ είναι $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (x+1)$ ή $(\ln|f(x)|)' = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)'$

ή $\ln|f(x)| = \dfrac{x^2+2x}{2} + c$ και για $x = 0$ είναι $\ln|f(0)| = 1 + c$ ή $c = 0$

Οπότε $\ln|f(x)| = \dfrac{x^2+2x}{2}$ ή $|f(x)| = e\dfrac{x^2+2x}{2}$ ή $f(x) = \pm e\dfrac{x^2+2x}{2}$

Επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί πρόσημο και με $f(1) > 0$ είναι $f(x) = e^{\frac{x^2+2x}{2}}$

4° θέμα

α) $f(x)=\alpha x^2-2x\ln x$

$f'(x)=2\alpha x-2\ln x-2$

$f''(x)=2\alpha-2\frac{1}{x}=2\frac{\alpha x-1}{x}$

x	0	1/9	
f΄΄		-	+
f		$\cup$	$\cap$

Είναι φανερός ο πίνακας...

β) $(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-\alpha=2(\alpha-1)(x-1) \Leftrightarrow y=2(\alpha-1)x-\alpha+2$

Για $x=0$ και $y=0$ είναι $\alpha=2$

γ) Τότε είναι $f(x)=2x^2-2x\ln x$, $f'(x)=4x-2\ln x-2$, $f''(x)=2\frac{2x-1}{x}$

Προφανώς η f στο $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ στρέφει τα κοίλα πάνω

Οπότε η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ είναι κάτω απ' την C_f

για κάθε $x\in[1,+\infty)$ δηλαδή $f(x)>y$ ή $f(x)>2x$ ή $f(x)\geq 2x$

...αφού για $\alpha=2$ η εφαπτόμενη είναι η $(\varepsilon): y=2x$

δ) $E=\int_1^e f(x)-2x\,dx$

$$=\int_1^e 2x^2-2x\ln x-2x\,dx$$

$$=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_1^e-\int_1^e (x^2)'\ln x\,dx-\left[x^2\right]_1^e$$

$$=\frac{2e^3}{3}-\left[x^2\ln x\right]_1^e+\int_1^e x\,dx-e^2+1$$

$$=\frac{2e^3}{3}-e^2+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e-e^2+1$$

$$=\frac{2e^3}{3}-e^2+\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)-e^2+1$$

$$=\frac{2e^3}{3}-e^2+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-e^2+1$$

$$=\frac{2}{3}e^3-\frac{3}{2}e^2-\frac{1}{6}\ \text{τ.μ.}$$